

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO
Bratislava**



DIPLOMOVÁ PRÁCA

2004

Vladimír Palaj

**Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského
Bratislava**

Algoritmizácia konštrukcií v Mongeovom zobrazení

Diplomová práca

Autor: Vladimír Palaj
Vedúca diplomovej práce: RNDr. Soňa Kudličková, CSc.

Bratislava 2004

Ďakujem vedúcej diplomovej práce
RNDr. Soni Kudličkovej, CSc. za cenné
rady, pripomienky, návrhy a hlavne čas,
ktorý mi venovala pri vypracovaní
diplomovej práce.

Ďalej chcem poďakovať svojim
rodičom za ich dôveru a podporu.
Nemôžem nespomenúť ani svojich
priateľov a poďakovať im za pomoc počas
celého štúdia na vysokej škole.

Čestne vyhlasujem, že som diplomovú
prácu vypracoval samostatne len s použitím
literatúry, ktorá je uvedená v zozname.

.....

OBSAH

ÚVOD	5
1. Z HISTÓRIE	6
2. GASPARD MONGE	8
2.1. Životopis	8
2.2. Bibliografi	10
2.3. Géométrie descriptive	11
3. MONGEOVO ZOBRAZENIE	14
3.1. Základné pojmy	14
3.2. Obraz bodu	22
3.3. Obraz priamky	26
3.3.1. Obraz bodu na priamke	30
3.3.2. Obraz dvojice priamok	31
3.4. Obraz roviny	35
3.4.1. Obraz bodu a priamky v rovine	42
3.4.2. Obraz dvojice rovín	47
3.5. Vzájomná poloha priamky a roviny	49
3.6. Sklápanie roviny	52
3.7. Otáčanie roviny	58
3.8. Obraz kolmice na rovinu	64
3.9. Obraz kružnice	66
4. VLASTNÉ ÚLOHY, PRÍKLADY	68
4.1. obraz bodu	68
4.2. obraz priamky	69
4.3. obraz roviny	70
ZÁVER	71
LITERATÚRA	72

Úvod

V každodennom živote sa stretávame s geometriou ako takou. Ani si neuvedomujeme, ako naša predstavivosť dokáže spájať geometrické poznatky (už zo základnej školy) so skutočnými problémami všedných dní.

A takisto minulosť niesla so sebou geometriu skrytú v rúšku matematiky. Potreba stále dokonalejších stavebných plánov viedla k vzniku nového odboru v technickom smere, deskriptívnej geometrie, ktorú jej zakladateľ, Francúz Gaspard Monge, definoval ako „ **... umenie znázorniť na list papiera, ktorý má len dva rozmery, trojrozmerné predmety tak, aby ich bolo možné presne určiť ...** “. Myšlienka prepojenia priestorových zákonitostí s rovinnými sa stala jej hlavným predmetom (problémom).

Predkladaná práca sa zaoberá štúdiom Mongeovho zobrazenia a nadväzujúcich spojitostí v konštrukčných úlohách, čím vytvára prehľadný zväzok pojmov a príkladov použiteľných najmä ako učebná pomôcka. Pre zrozumiteľnosť sú všetky konštrukcie algoritmicky zaznamenané formou zápisu. Do práce je zaradených veľa obrázkov, ktoré dokumentujú znalosti a vzťahy z viacerých vetiev deskriptívnej geometrie, a tak dopĺňajú odborný výklad.

Množstvo názorných obrázkov má uľahčiť čitateľovi samostatne spracovať tému do hĺbky tak, aby získal jednoznačnú predstavu o „trojrozmernom“ dojme. Zostavenie postupnosti týchto obrázkov môže ďalej poslúžiť aj ako podklad pre fólie, prípadne ako doplnok výučby podporovanej počítačom.

Autor

1, Z HISTÓRIE

Nemožno nespomenúť niečo z histórie, čo sa týka samotnej deskriptívnej geometrie. Pre potreby ľudí v rôznych pracovných odvetviach, ako napr. stavebníctve, zememeračstve, astronómii, starodávnej kartografii, maliarstve a sochárstve, sa postupom času začala rodiť geometria, pod ktorú spadá aj samotná deskriptívna geometria.

Podľa odvetví možno základy deskriptívnej geometrie časovo rozčleniť takto:

- **stavitel'stvo** – starý Egypt (3000 pr. n. l.) : polvalcová klenba
 - Babylonská ríša: vodná stoka
 - Rímska ríša: kamenné stavby ako mosty, opevnenia, komunikácie a vodovody
 - **Marcus POLIO VITRUVIUS** (31 pr. n. l. – 14 n. l.) : rímsky stavitel' a učitel', učí umeniu otesávať stavebný kameň, tzv. kameňorez
 - **A. F. FRÈZIÈRE** (1682 – 1773) : zakladateľ stavitel'stva kamenných stavieb
- **kartografia** – Sumerská ríša (5000 pr. n. l.) : „mapa“ severného Iraku
 - **HIPPARCHOS** (180? – 125 pr. n. l.) : primitívne glóbusy
 - **PTOLEMAIOS** (85 – 165 n. l.) : zobrazovanie hviezdnej oblohy
- **maliarstvo a sochárstvo** – egyptské maľby a sochy
 - grécke a rímske maľby a sochy
 - **Albrecht DÜRER** (1417 – 1528) : nemecký maliar, použitie „zariadení“ pre perspektívu
 - **Brook TAYLOR** (1685 – 1731): anglický matematik, základy lineárnej perspektívy

- **Gaspard MONGE** (1746 – 1818) : francúzsky učiteľ,
zakladateľ deskriptívnej geometrie ako samostatného
vedného odboru

- **fotogrametria** = zisťovanie skutočnej situácie z fotografickej snímky
- **kinematika**
- **problematika riešenia striech**
- **problematika ciest, úlohy v teréne**
- **konštrukcie plôch**
- **teória nomogramov**

Veľký význam tejto disciplíny sa kladie aj na rozvoj technických rysov, vďaka ktorým naberá deskriptívna geometria naozaj svetový rozmer a jej aplikácia nezostáva v úzadí ani v súčasnom období počítačov.

2, GASPARD MONGE

(° 10. 5. 1746 - † 18. 7. 1818)



Gaspard Monge, francúzsky matematik

2.1, Životopis

Narodil sa 10. mája 1746 v burgundskom Beaune vo Francúzsku. Bol synom JAQUESA MONGEA, podomového obchodníka a neskôr brúsiča nožov. Kvôli svojmu presvedčeniu o vzdelanosti predurčil všetkých troch svojich synov k zapísaniu sa na strednú školu v Beaune, vedenú oratoristami (duchovný rád). Všetci traja boli v živote úspešní. **Luise MONGE** sa stal examinátorom námorných chovancov, **Jean MONGE** pôsobil ako profesor

hydrografie na námornej škole v Antverpách a najstarší **Gaspard MONGE** preslávil rodinu miestom ministra námorníctva.

Už od útleho veku Gaspard Monge podľa školských výsledkov vynikal vo všetkých odboroch. Ako 14-ročný skonštruoval požiarnu striekačku. V 16-tich rokoch pomocou vlastnoručne vyrobených pomôcok vymodeloval plán svojho rodného mesta, ktorý sa zachoval v knižnici v Beaune. Učiteľmi odporučený na miesto učiteľa fyziky v lyonskej škole sa tohto postu vzdáva.

Krátko nato neznámy dôstojník presvedčil otca, aby poslal svojho syna Gasparda na vojenskú školu v Mezières. To však ešte nevedel, že kvôli svojmu neurodzenému pôvodu nikdy nebude povýšený. Novozaložená škola fungovala na dvoch stupňoch. Vo vyššom oddelení mohlo študovať iba 20 žiakov, z ktorých každý rok povýšili iba 10 na hodnosť inžiniera-dôstojníka a dosadzovali na vysoké vojenské miesta. Ostatní, na nižšom stupni, vykonávali druhotriednu (nekvalifikovanú), zato však praktickú činnosť na tzv. nižšej škole, kde sa učili elementárnym princípom, algebre, výpočtom v geometrii, základným konštrukciám z dreva i kameňa, ako aj zručnostiam v označovaní. Okrem toho zo sadry modelovali modely rozmanitých tvarov, ako rôzne klenby a ich časti. Malo to praktické využitie pre zostrojovanie rôznych úloh. Jednou z nich bolo navrhnutie stavby tak, aby žiadna jej časť nebola vystavená priamemu zásahu nepriateľa, tzv. defilé pevnosti. Obvyklé dve riešenia (nepresná grafická skúška alebo zdĺhavý výpočet) obmenil najstarší Monge za vlastnú metódu, ktorá na vzdory zatrpknutého profesora prvýkrát neprešla, no po jej opätovnom preskúšaní sa potvrdila jej správnosť. Popri štúdiu zdokonaľoval svoje metódy a bez použitia aritmetiky zovšeobecňoval riešenia analogických úloh. Takto sa začína vyvíjať prvotná deskriptívna geometria.

Ako 19-ročný sa stáva výpomocným učiteľom na vyššom oddelení. Nový predmet „Deskriptívna geometria“ sa však udržiava ako vojenské tajomstvo viac ako 30 rokov. Mal dovolené ju používať iba pri výučbe kameňorezu.

Neskoršie životné ocenenia a úspechy (pády) :

- 1768 – profesor matematiky
- 1771 – profesor fyziky na škole v Mezières
- 1780 – profesor hydrodynamiky, vyučoval aj v Mezières, aj v Paríži
 - člen Académie Française (Francúzska akadémia vied)
- 1783 – 1789 - examinátor námorného dorastu
- 1792 – 1793 - menovaný ministrom námorníctva a kolónií
- 1794 – odmieta post prezidenta École polytechnique v Paríži, nástupca
LAGRANGE
 - člen Akadémie Institut de France
- 1795 – profesor geometrie na École normale
- 1798 – cesta do Egypta s **Napoleonom BONAPARTEM**, stáva sa 1. predsedom (a Napoleon zakladateľom) Egyptského inštitútu umenia a vied (Egyptskej akadémie vied).
- 1799 – 1809 - učiteľ geometrie na École polytechnique
- 1805 – cisár ho menuje senátorom
- 1806 – pre zmenu grófom z Pelusia
- 1816 – zbavený všetkých hodností a úradov
- 1818 – zomiera v Paríži (28. júla)

2.2, **Bibliografia**

Traité élémentaire de statique, Paris, 1788.

Description de l'Art de fabriquer les canons, Paris, 1793.

Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie, Paris, 1794-95.

Géométrie descriptive, Paris, 1798-99.

Applications de l'analyse à la géométrie, Paris, 1807.

2.3, **G**éométrie descriptive*

Takýto názov dostala kniha z rúk majstra geometrie Gasparda Mongea, najlepšie vystihujúca nový predmet Deskriptívnu geometriu.

V druhej polovici 18. storočia nadobúda geometria ohromných rozmerov. Práve v tejto dobe vrcholí jej rozkvet, spájajúci sa predovšetkým s jedným menom, t.j. Gaspard Monge. Priemysel a stavebníctvo vo Francúzsku sa rozmáhalo neuveriteľnou rýchlosťou a veda si popri rozvoji deskriptívnej geometrie vyžadovala novú knihu, učebnicu (určenú aj pre vysoké školy)

V roku 1795 vychádzajú stenografické záznamy Mongeových prednášok v „*Journal des Écoles normales*“ a o pár rokov neskôr (1798-1799) je publikovaná Mongeova „*Géométrie descriptive, Leçons données aux Écoles normales, 1 an III de la République*“ ako samostatná kniha. Takmer každé 10-ročie sa objavujú jej ďalšie vydania a dokonca sa prekladá i do iných jazykov: angličtina, nemčina, taliančina, ruština.

Výstavba

Celá deskriptívnej geometrie je spísaná a vysvetlená v piatich kapitolách a dodatku, pozostávajúceho z troch častí. Neskôr jeho žiaci** a zároveň nasledovníci doplnili dielo o ďalšie dodatky, najmä **MACHETTE** a **BRISSON** (doplnené sú základy osvetlenia a perspektívy).

Druhý (praktický) diel mal zahŕňať základné konštrukcie kameňorezu, konštrukcie priehrad, perspektívu, konštrukcie osvetlenia a strojové časti.

* Pôvodné vydanie *Leçons de géométrie descriptive*. Paris 1795

** Mongeovi žiaci: **S. F. LACROIX** (1765 – 1843), **J. N. P. MACHETTE** (1769 – 1834), **B. BRISSON** (1777 – 1827), **F. P. CH. DUPIN** (1784 – 1873), **C. F. A. LEROY** (1780 – 1854), o projektívnu geometriu sa zaslúžil **J. V. PONCELET** (1788 – 1867), **M. CHASLES** (1793 – 1886), v teórii a praxi zobrazovacích metód sa uplatnili: **CH. QUETELET** (1796 – 1847), **N. DANDELIN** (1794 – 1847)

Predslov

Mongeov predslov zohral zaujímavú rolu. Autor v ňom hovorí o význame deskriptívnej geometrie, v tom čase veľmi dôležitom „prvku“ pre rozvoj viacerých technických odvetví, najmä pre francúzsky priemysel. Vytyčuje dva hlavné ciele:

- cieľom je založiť jazyk technika, nevyhnutný pre zjednodušenie a sprehľadnenie projektov, stavieb, ...
- cieľom je umenie používať teóriu, získať istotu, rozvíjať intelektuálne schopnosti veľkého národa

Veľký dôraz kládol Monge aj na praktické riešenie úloh, myslí sa tým hlavne práca s pravítkom a kružidlom.

Obsah

Prvé štyri časti boli venované žiakom stredných škôl od 12 rokov a posledná piata časť predovšetkým vysokoškolským študentom.

1. kapitola – Úloha a metóda deskriptívnej geometrie. Základné úlohy.
2. kapitola – O dotykových rovinách a normálach krivých plôch.
3. kapitola – Rezy a prieniky krivých plôch.
4. kapitola – Použitie vysvetlených metód na riešenie úloh z techniky a umenia.
5. kapitola – Priestorové krivky a plochy.

Dielo zahŕňa 33 oddelených úloh: 12 úloh na priamku a rovinu, 4 úlohy na dotykové roviny a normály ku krivým plochám, 7 úloh na prienik plôch, 10 úloh všeobecného charakteru.

To ale nie je všetko, čomu autor venoval priestor vo svojom diele. Nachádzajú sa tam aj iné tematiky, ako napr. plochy s hranou vratu, spôsob pomocných priesečných guľových plôch na zostrojenie bodov rezu rotačných plôch rovinou, plochy konštantného spádu, sférická krivosť, použitie hyperboloidu pri riešení úloh s plochami druhého stupňa, čiara najväčšieho

spádu na geodetickej (topografickej) ploche, niektoré otázky z teórie premietania s číselnými kótami pri projektovaní pevností.

Monge dokázal upevniť a určiť vzťah medzi priestorovými konštrukciami a konštrukciami v rovine. Použil pri tom dve navzájom kolmé roviny pretínajúce sa v pevnej priamke, do ktorých sa zobrazujú objekty pomocou pravouhlého premietania. Následne otočil jednu z priemetní okolo priesečnice do roviny druhej priemetne, a tým dospel k zákonitostiam rovinným. Priesečnica mala nemennú polohu a nazývala sa **základnicou***.

* z francúzskeho „*ligne de terre*“

3, MONGEOVO ZOBRAZENIE

3.1, ZÁKLADNÉ POJMY

Existuje viacero zobrazovacích metód rovnobežného premietania. V technickej praxi je najbežnejšie používanou zobrazovacou metódou Mongeovo zobrazenie a je úvodnou zobrazovacou metódou, ktorá sa študuje v učebniciach deskriptívnej geometrie.

Pri ich čítaní človek často nadobúda presvedčenie, že obrázky plné čiar a husto písané texty dokáže len s veľkou námahou naštudovať. Práve snahou predkladaného spracovania je zostaviť algoritmy pre jednotlivé konštrukcie a každý krok algoritmu graficky skonštruovať – pridaním novej informácie do obrázku.

Spracovanie textu ovplyvnilo aj čínske príslovie: „Lepšie raz vidieť, ako tisíckrát počuť.“ Z tohto dôvodu je v práci ilustrovaná stereometrická poloha útvarov v trojrozmernom Euklidovskom priestore a súčasne v nákresni, t. j. v Mongeovom zobrazení. Písaný text je strohý (algoritmický), je to spôsobené vopred vypracovaným postupom: navrhnuť a spracovať zobrazovaciu metódu – Mongeovo zobrazenie – v obrázkoch. Kvôli prehľadnosti sa do samotného textu nezaraďujú číselné označenia obrázkov, preto daný text umiestnený vedľa, resp. pod týmito obrázkami ich priamo charakterizuje. Symbolika používaná v geometrických zápisoch je v súlade s matematickou terminológiou.

Predstavou autora je, aby čitateľ pri sledovaní textu (vytlačeného alebo na monitore počítača) samostatne graficky ilustroval kroky konštrukcie v nákresni ε . Priestorové reprezentácie (označované E_3) sú dopĺňujúce, ale ich dôležitosť spočíva vo vytváraní priestorovej kultúry čitateľa. Niekedy sa nepodarilo vystihnúť všetky situácie, ktoré by mohli nastať, ale naša práca

vyúsťuje v snahe podať čitateľovi akýsi návrh na možný spôsob vyučovania deskriptívnej geometrie.

Cieľovou skupinou, pre ktorú je predkladaný text spracovaný, sú študenti pedagogických kombinácií s matematikou. Predpokladá sa, že po ukončení vysokoškolského štúdia, práve oni budú šíriť informácie o Mongeovom zobrazení. Z týchto dôvodov pri zostavovaní obrázkov a konštrukcií bola zohľadnená požiadavka ponúknuť „pekné“ obrázky, ktoré sa ľahko črtajú na tabuľu, a tým zabezpečiť podklady, najmä grafické, k prednáške s názvom: Mongeovo zobrazenie.

Princíp zobrazovacej metódy

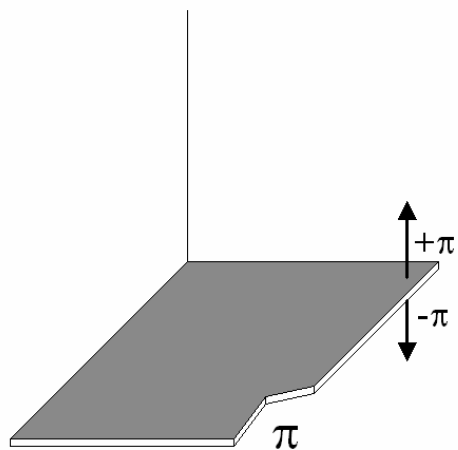
Dané prvky: Dve navzájom kolmé roviny π , ν v trojrozmernom euklidovskom priestore E_3 .

▣ prvá priemetňa – rovina

π ; v technickej praxi

pôdorysňa

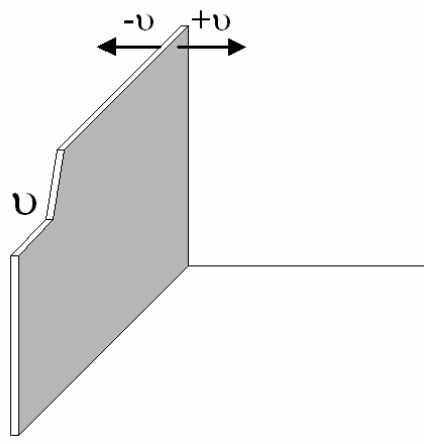
– rozdelí priestor na dva polpriestory, orientujeme ich na kladný (ozn. +) a záporný (ozn. -)



Obr. 1

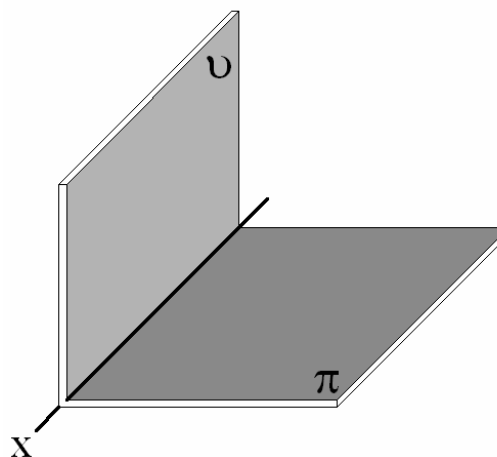
▣ **druhá priemetňa** –
rovina v ; v technickej praxi
nárysňa

– rozdelí priestor na dva
 polpriestory, orientujeme
 ich na kladný (ozn. +)
 a záporný (ozn. -)



Obr. 2

▣ **základnica x** – priesečnica rovín π , v



Obr. 3

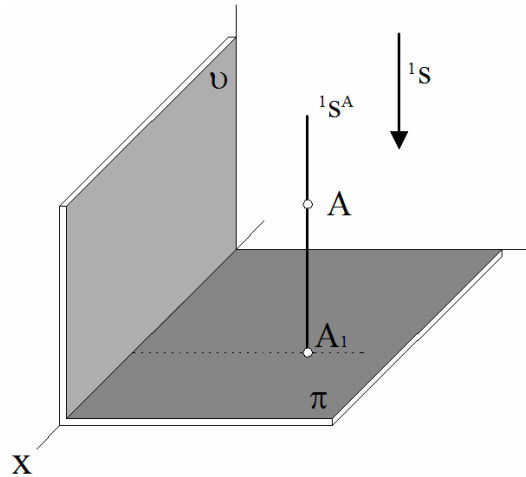
Určenie premietaní: Daný bod A priestoru E_3 .

▣ **kolmé premietanie do**

roviny π – určené
priemetňou π a **osnovou**
 $\{^1s\}$, $^1s \perp \pi$

▣ **prvá premietacia**
priamka – priamka
osnovy $\{^1s\}$

▣ **prvý priemet bodu A**
(pôdorys) – priesečník
premietacej priamky $^1s^A$
a priemetne π , označenie
 $A_1 = ^1s^A \cap \pi$

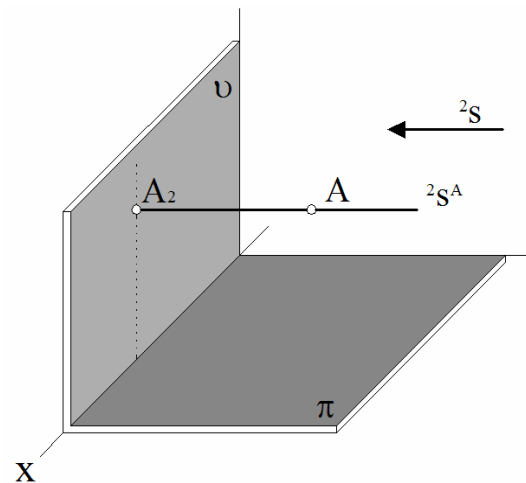


Obr.4

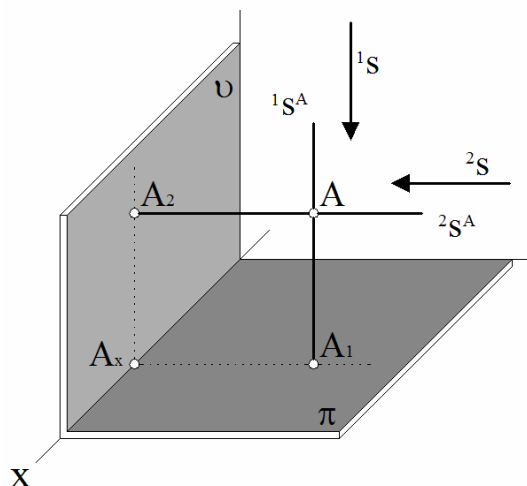
▣ **kolmé premietanie do**
roviny v – určené
priemetňou v a osnovou
 $\{^2s\}$, $^2s \perp v$

▣ **druhá premietacia**
priamka – priamka
osnovy $\{^2s\}$

▣ **druhý priemet bodu A**
(nárys) – priesečník
premietacej priamky $^2s^A$
a priemetne v , označenie
 $A_2 = ^2s^A \cap v$



Obr.5



Obr. 6

Veta: Zobrazenie $\varphi: E_3 \rightarrow \pi \times v$, ktoré bodu $A \in E_3$ priradí usporiadanú dvojicu bodov $[A_1, A_2]$,
kde $A_1A_x \perp x$, $A_2A_x \perp x$; $A_x = \overleftrightarrow{AA_1A_2} \cap x$, je bijekcia.

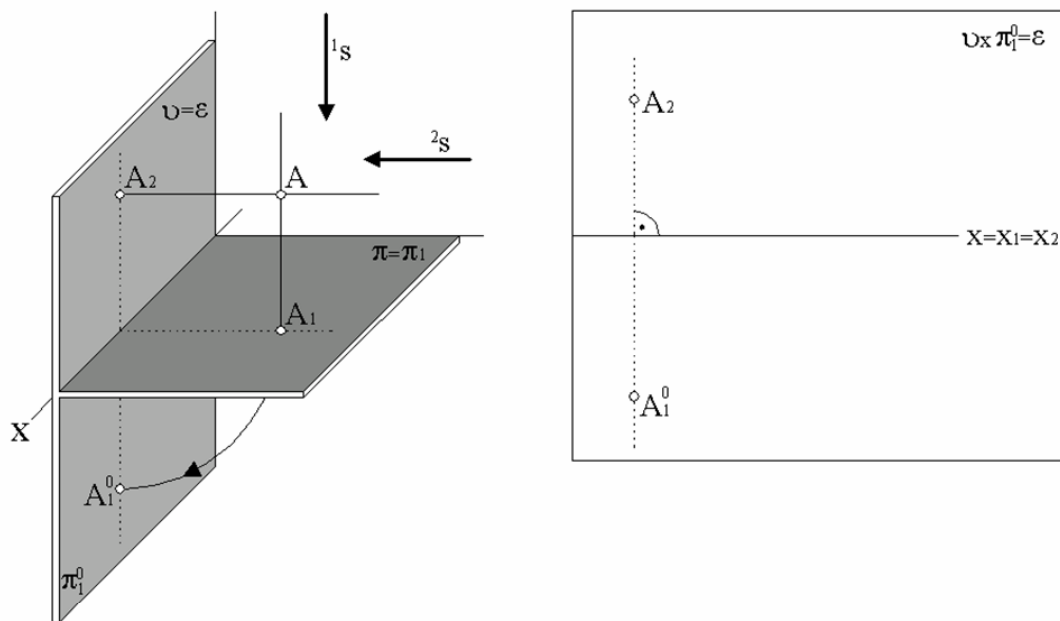
✚ **združenie priemetní** – otočenie O priemetne $\pi = (\pi_1)^*$ okolo priamky x do priemetne v tak, aby kladná polrovina roviny π sa otočila do zápornej polroviny roviny v .

Zápis: $O: (\pi_1) \rightarrow (\pi_1^0) = v,$

$$A_1 \rightarrow A_1^0$$

Vol'ba nákresne ε – rovina u , presnejšie $\varepsilon = \pi_1^0 \times u$

* (π_1) označuje rovinné pole prvých priemetov bodov



Obr. 7

Veta: Zobrazenie $\psi: E_3 \rightarrow \varepsilon = \pi_1^0 \times v$ priradí bodu $A \in E_3$ usporiadanú dvojicu bodov $[A_1^0, A_2]$ v nákrese, kde $A_1^0 A_2 \perp x$ alebo $A_1^0 = A_2$, je bijekcia.

Definícia: Bijektívne zobrazenie ψ sa nazýva MONGEOVO ZOBRAZENIE (Mongeova metóda, pravouhlé premietanie na dve združené priemetne).

- **združené priemety bodu A** (pôdorys, nárys) – usporiadaná dvojica bodov A_1^0, A_2 (ozn. $[A_1^0, A_2]$)
- **ordinála bodu** – spojnice bodov A_1^0, A_2 kolmá na základnicu x

V ďalšom texte budeme pracovať s útvarmi. Označme ich spoločne U . Priemetom útvaru je množina usporiadaných dvojíc bodov $[A_1^0, A_2]$ pre všetky body A patriace útvaru.

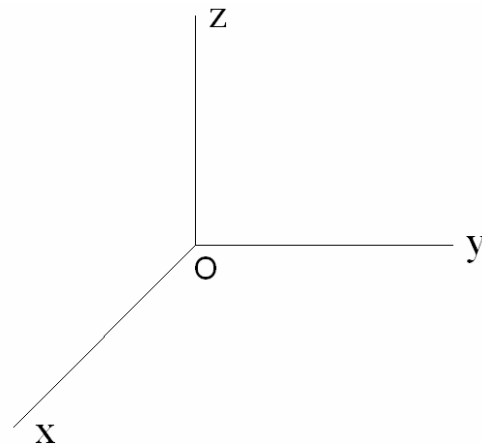
pôdorys U_1^0 útvaru U – množina pôdorysov bodov útvaru $U_1^0 = \{A_1^0, A \in U\}$

nárys U_2 útvaru U – množina nárysov bodov útvaru $U_2 = \{A_2, A \in U\}$

združené priemety (U_1^0, U_2) útvaru – usporiadaná dvojica pôdorys U_1^0 a nárys U_2 útvaru U

Súradnicový systém v trojrozmernom priestore E_3 :

V technickej praxi určujeme body súradnicami vzhľadom na zvolenú ortonormálnu súradnicovú sústavu. $\langle O; x, y, z \rangle$ - ortonormálna súradnicová sústava s pravotočivou orientáciou (podľa dohody).



Obr. 8

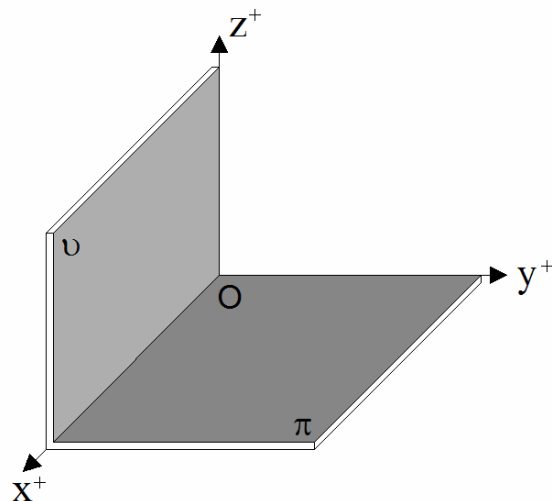
Umiestnenie:

Začiatok O – leží na základnici $x = \pi \cap v$

Súradnicová os x – základnica x , kladná polpriamka x^+ (pravotočivá orientácia)

Súradnicová os y – leží v rovine π , kladná polpriamka y^+ patrí kladnému polpriestoru v^+

Súradnicová os z – leží v rovine v , kladná polpriamka z^+ patrí kladnému polpriestoru π^+



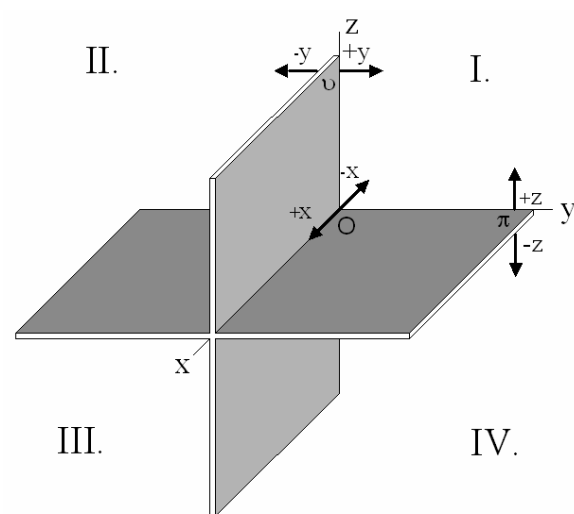
Obr.9

Priestor E_3 je rozdelený na kvadranty: štyri konvexné oblasti určené rovinami π, ν .

Pre body priestoru E_3 platí, že orientovaná vzdialenosť bodu od roviny π (ν) má rovnaké znamienko ako príslušný polpriestor π (ν).

Orientácia polpriestorov:

- I. kvadrant (π^+, ν^+)
- II. kvadrant (π^+, ν^-)
- III. kvadrant (π^-, ν^-)
- IV. kvadrant (π^-, ν^+)



Obr.10

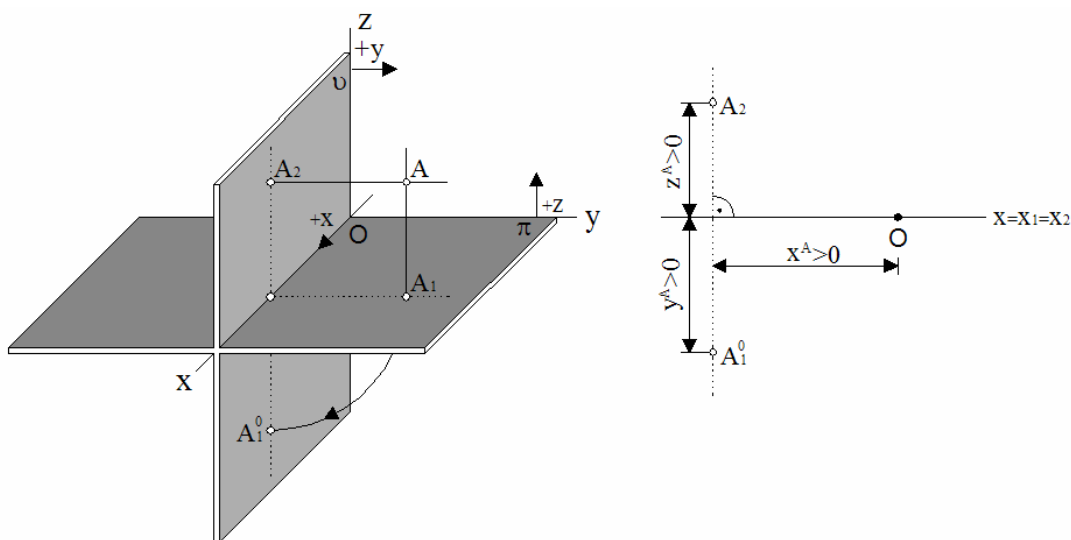
3.2, **O**BRAZ BODU - útvar U – bod

▣ **zdrúžené priemety bodu** – usporiadaná dvojica $[A_1^0, A_2]$, $A_1^0 A_2 \perp x$

A_1^0 – *pôdorys bodu A*

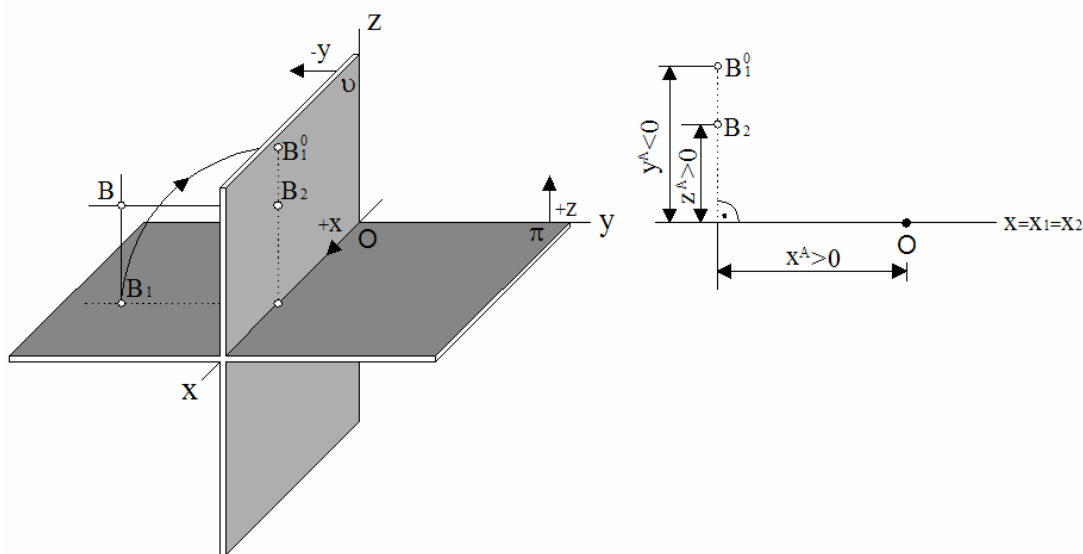
A_2 – *nárys bodu A*

▣ **I. kvadrant:** bod A ($x_A, y_A > 0, z_A > 0$)



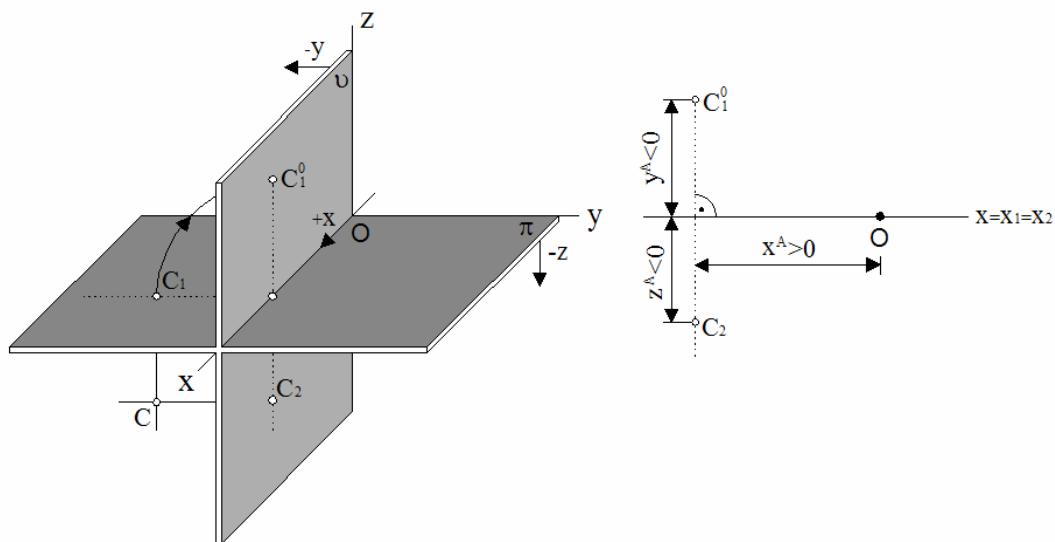
Obr. 11

▣ **II. kvadrant:** bod B ($x_B, y_B < 0, z_B > 0$)



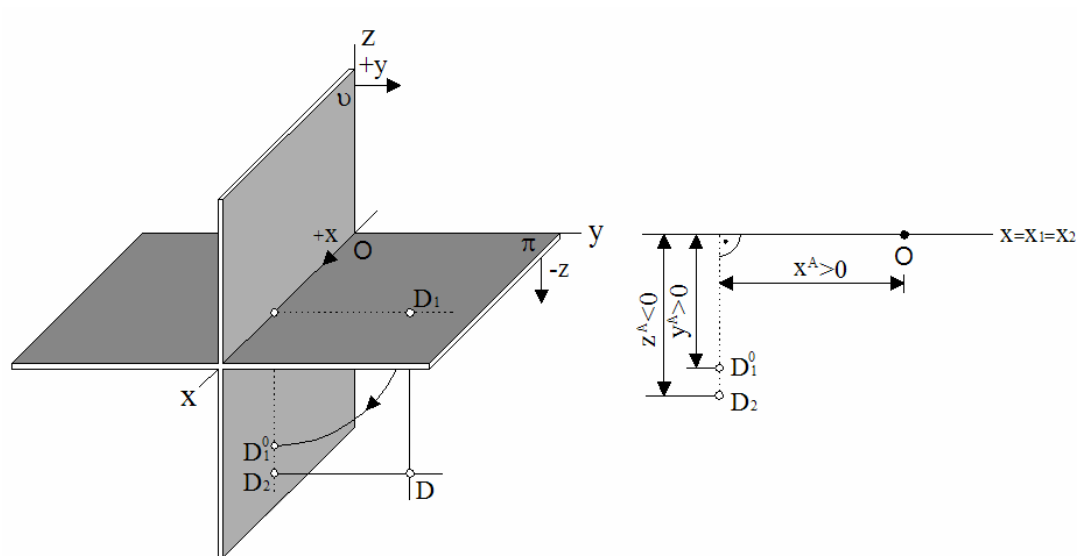
Obr. 12

■ **III. kvadrant:** bod C ($x_C, y_C < 0, z_C < 0$)



Obr. 13

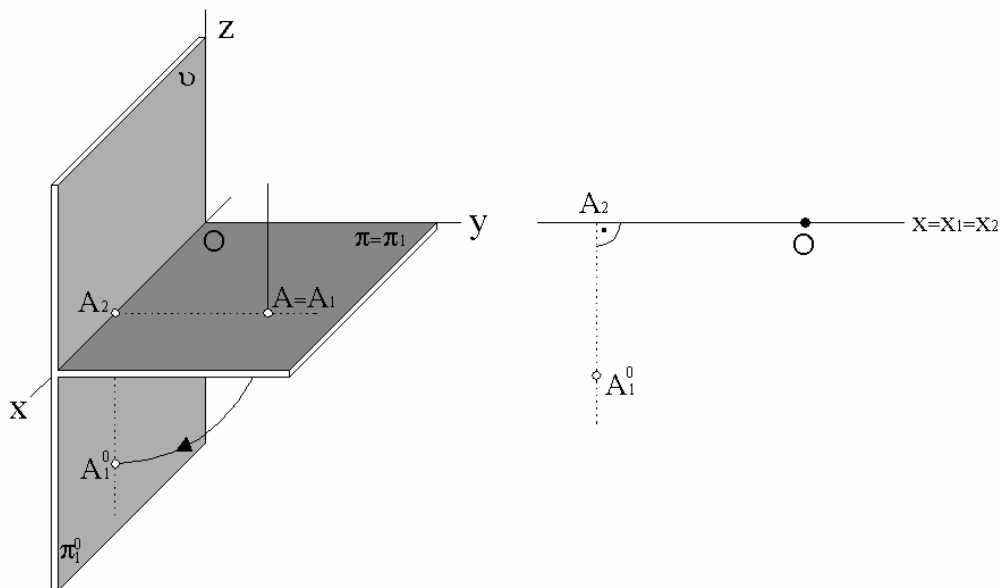
■ **IV. kvadrant:** bod D ($x_D, y_D > 0, z_D < 0$)



Obr. 14

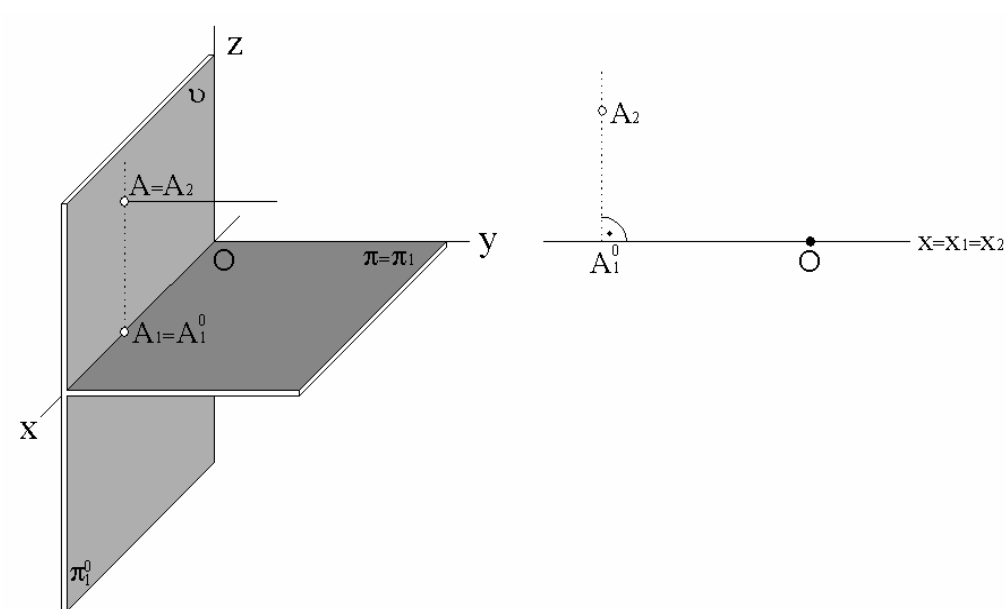
Niektoré špeciálne polohy bodu:

■ **bod priemetne π :** bod $A(x_A, y_A, 0)$



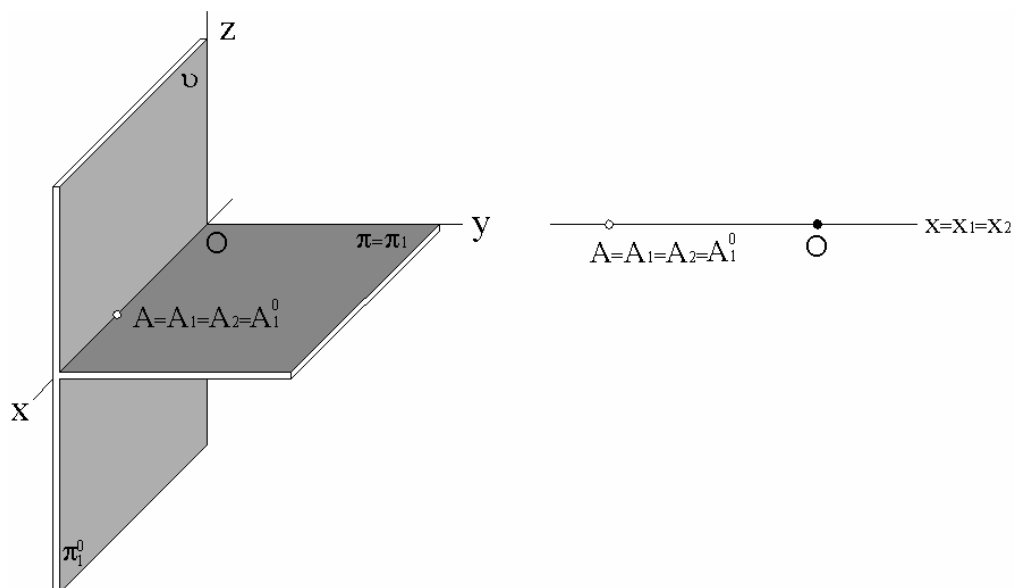
Obr. 15

■ **bod priemetne ν :** bod $A(x_A, 0, z_A)$



Obr. 16

■ bod základnice x: bod A ($x_A, 0, 0$)

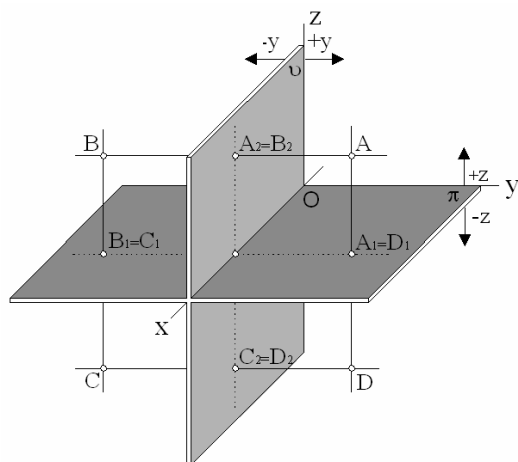


Obr. 17

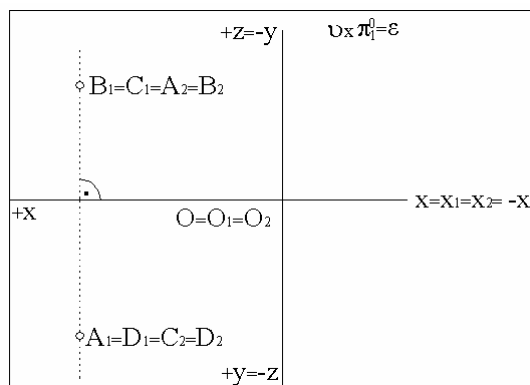
V ďalšom texte v označovaní pre združenú polohu bodu A_1^0 (pôdorys) bude vynechaný symbol „ 0 “, teda iba A_1 .

Priestor E_3

Nákresňa $\varepsilon = \pi_1^0 \times v$



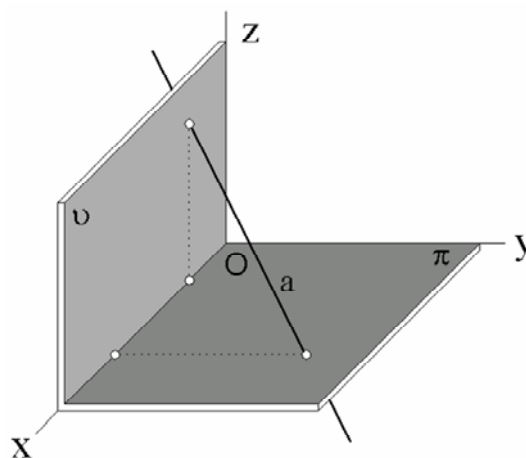
Obr. 18



Obr. 19

3.3, OBRAZ PRIAMKY - útvar U – priamka

Nech **priamka** a je vo všeobecnej polohe vzhľadom k priemetiam a základnici.

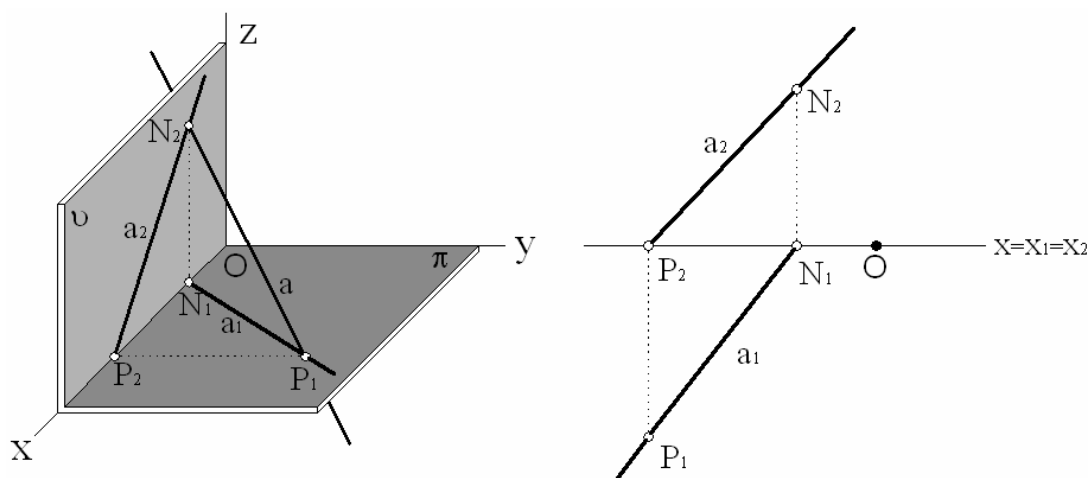


Obr. 20

▣ **združené priemety priamky** – usporiadaná dvojica priamok $[a_1, a_2]$

a_1 – **pôdorys** priamky a

a_2 – **nárys** priamky a



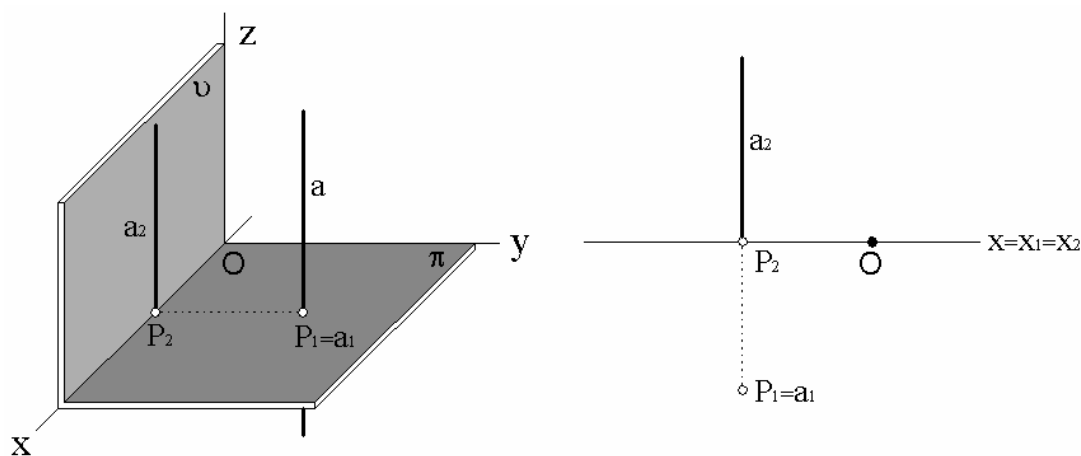
Obr. 21

Významné body priamky:

- ▣ **pôdorysný stopník priamky P^a** – priesečník priamky a s priemetňou π (ak existuje); $P^a = a \cap \pi$
- ▣ **nárysny stopník priamky N^a** – priesečník priamky a s priemetňou ν (ak existuje); $N^a = a \cap \nu$

Niektoré špeciálne polohy priamky vzhľadom k priemetniam a základnici, určenie stopníkov, ak existujú:

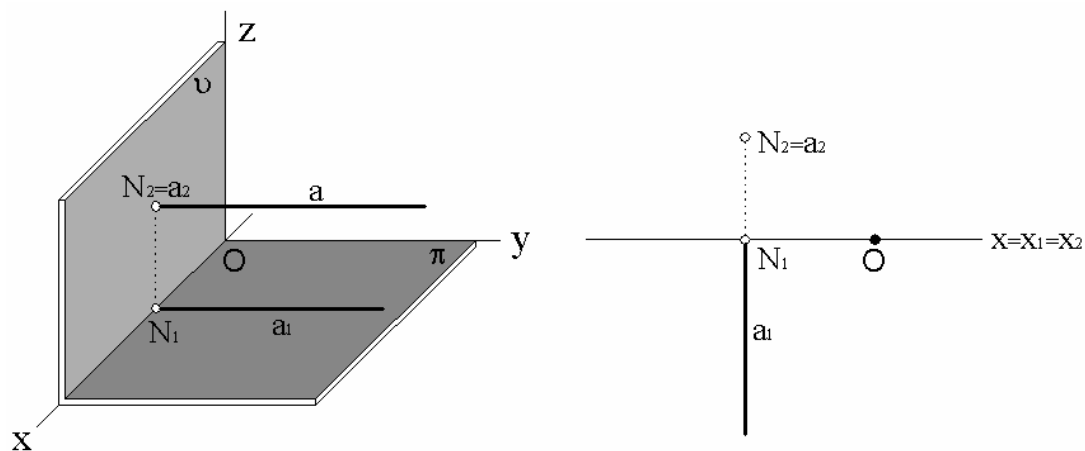
- ▣ **prvá premietacia priamka** – priamka kolmá na priemetňu π
 $a \perp \pi$



Obr. 22

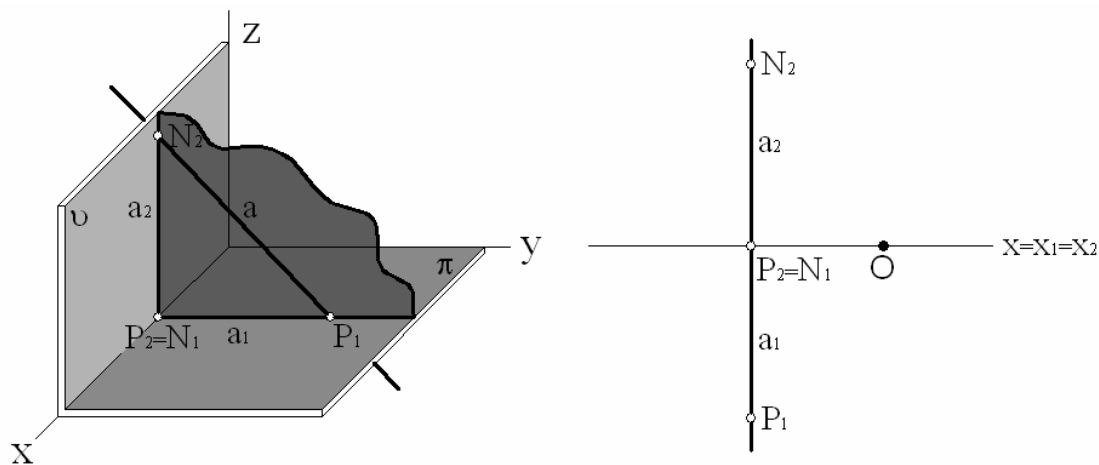
▣ druhá premietacia priamka – priamka kolmá na priemetňu v

$$a \perp v$$



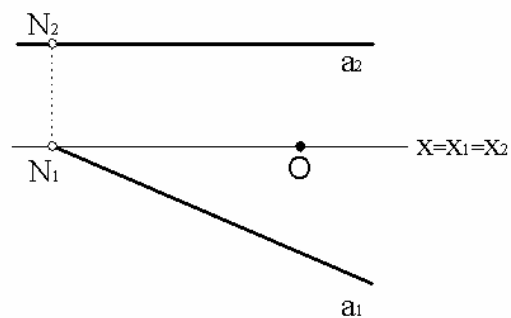
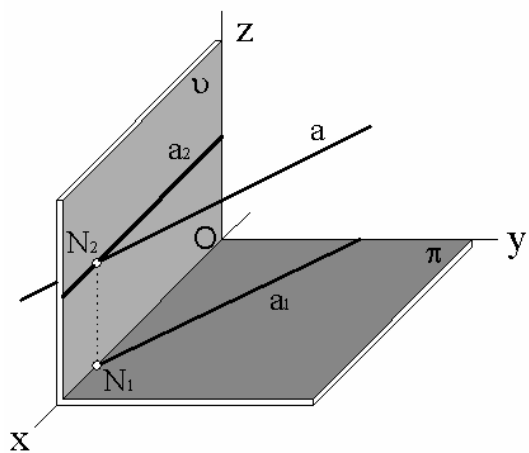
Obr. 23

▣ $a \perp x$



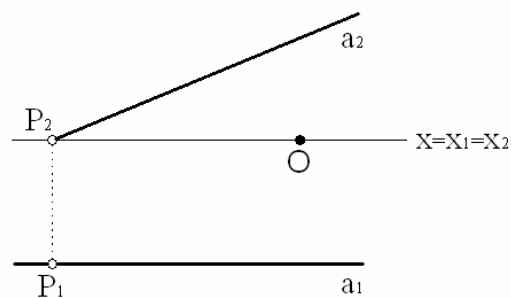
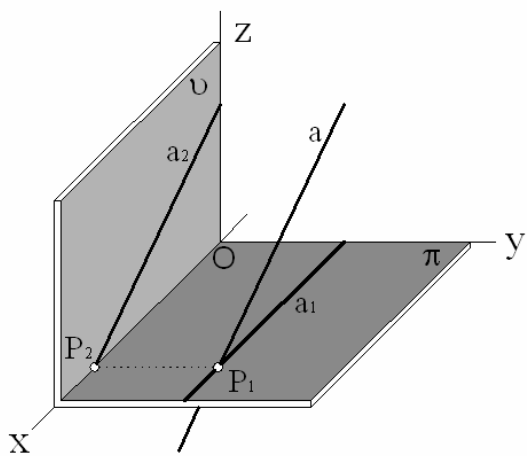
Obr. 24

■ $a \parallel \pi$



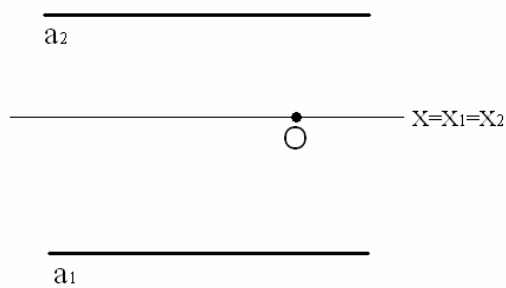
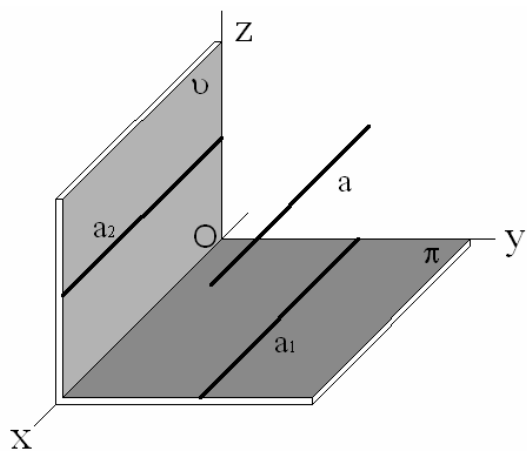
Obr. 25

■ $a \parallel v$



Obr. 26

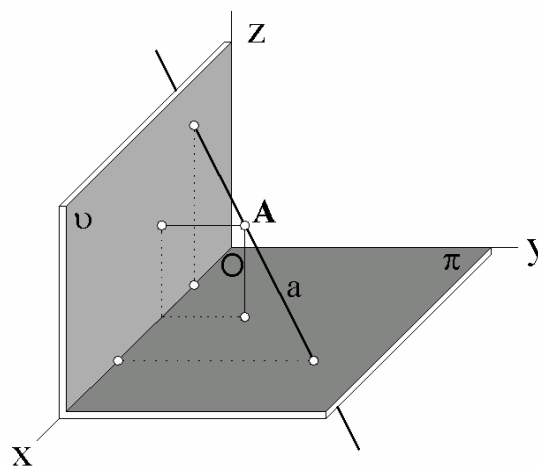
■ $a \parallel x$



Obr. 27

3.3.1, OBRAZ BODU NA PRIAMKE- útvar U– bod A, priamka a

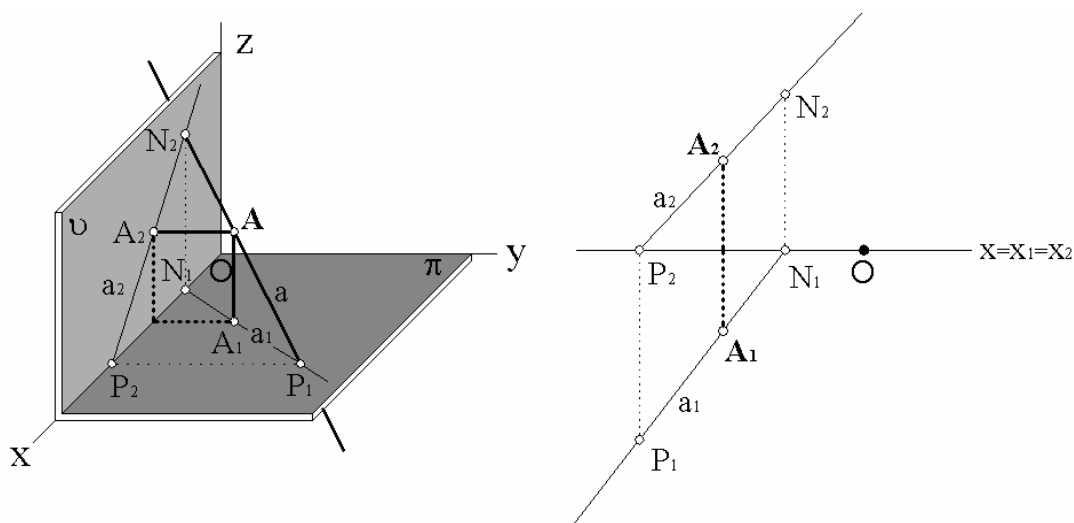
Priamka je množina bodov $a = \{A, A \in a\}$



Obr. 28

Bod A leží na priamke a práve vtedy*, keď pôdorys bodu A_1 leží na pôdoryse priamky a_1 , nárys bodu A_2 leží na náryse priamky a_2 .

Zápis: $A \in a \Leftrightarrow A_1 \in a_1, A_2 \in a_2$



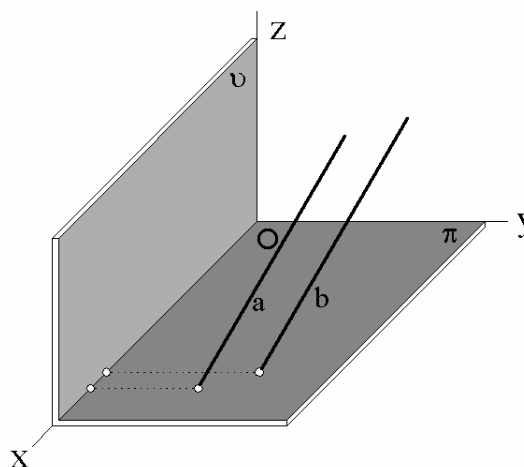
Obr. 29

* do úvahy berieme iba tie prípady, keď **priamka a** nie je kolmá na základnicu x

3.3.2, OBRAZ DVOJICE PRIAMOK - útvar U – dvojica priamok

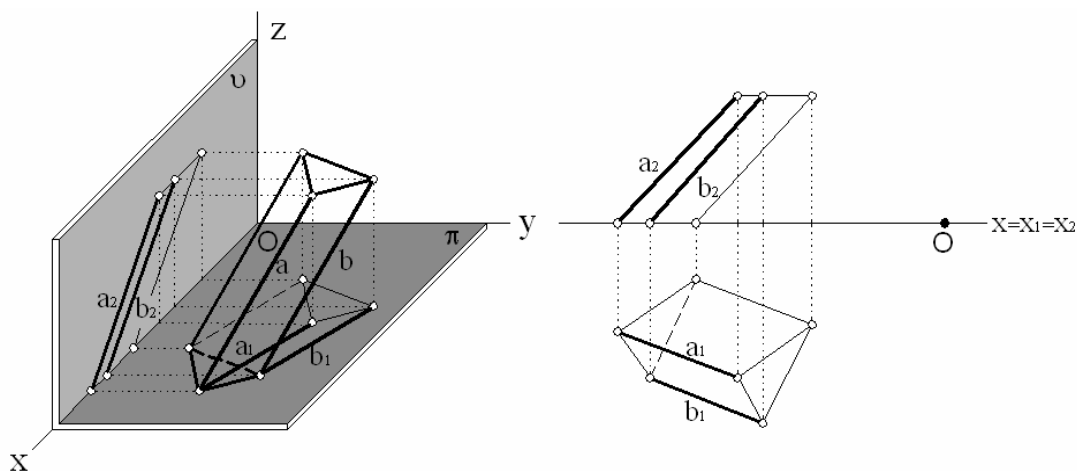
Priamky a, b sú vo všeobecnej polohe vzhľadom k rovinám π, ν a základnici x .

▣ rovnobežné priamky: $a \parallel b$

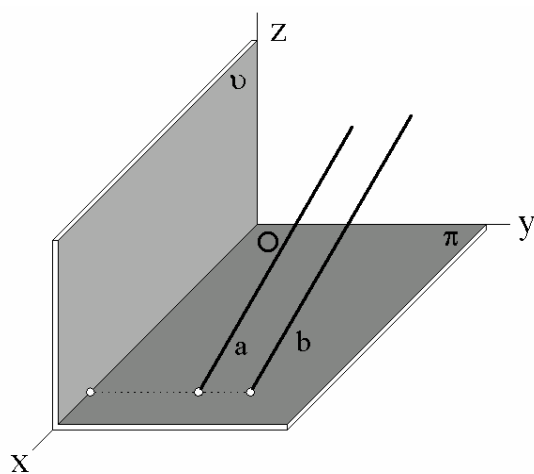


Obr. 30

Zápis: $a \parallel b \Leftrightarrow a_1 \parallel b_1, a_2 \parallel b_2$

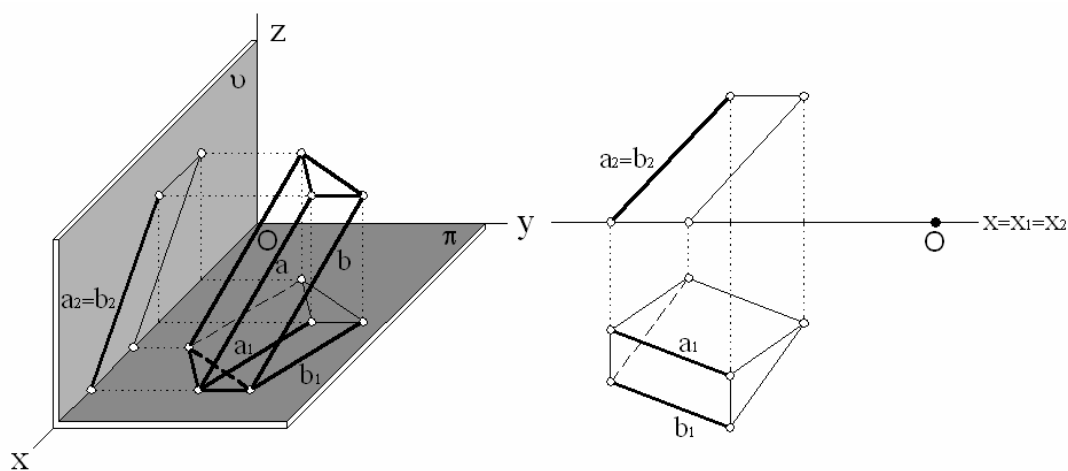


Obr. 31



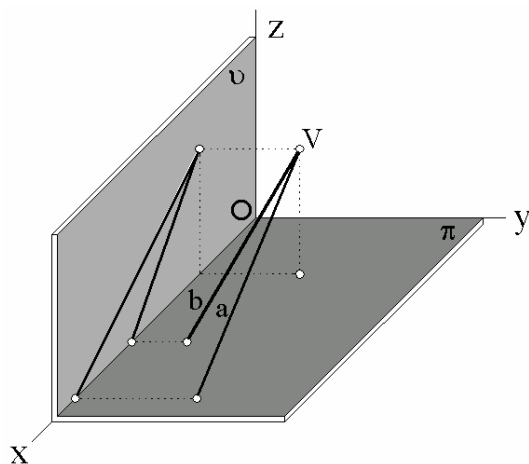
Obr. 32

Zápis: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 \parallel \mathbf{b}_2$



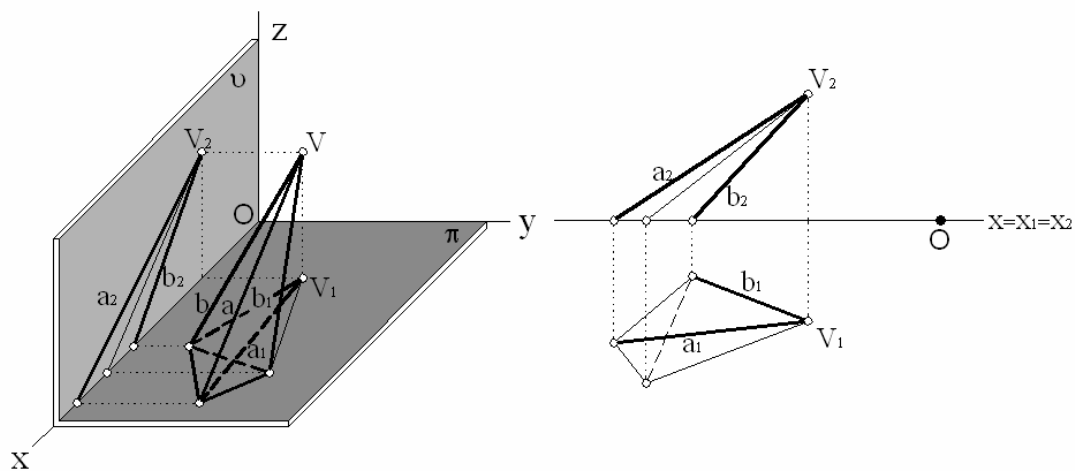
Obr. 33

▣ rôznobežné priamky: $a \nparallel b$



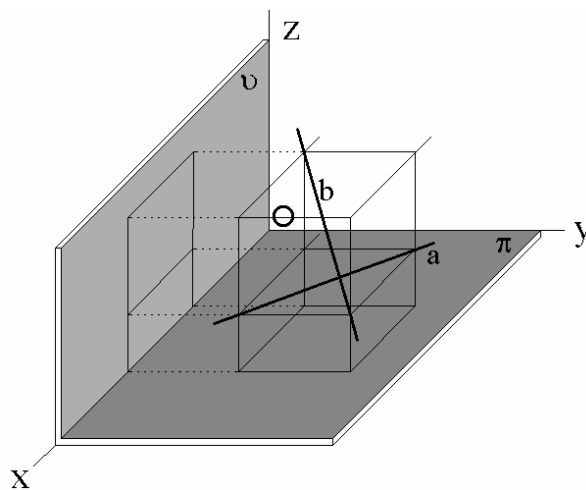
Obr. 34

Zápis: $a \nparallel b \Leftrightarrow a_1 \cap b_1 = \{V_1\}; a_2 \cap b_2 = \{V_2\}$; priesečníky V_1, V_2 ležia na ordinále ($V_1V_2 \perp x_{12}$)



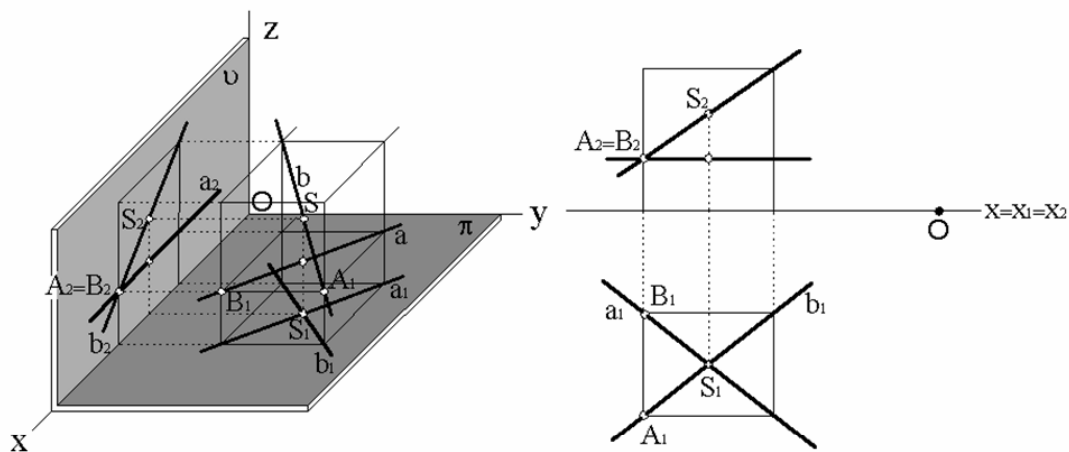
Obr. 35

▣ mimobežné priamky: $a \not\parallel b$



Obr. 36

Zápis: $a \not\parallel b \Leftrightarrow a_1 \cap b_1 = \{S_1\}$; $a_2 \cap b_2 = \{A_2=B_2\}$; priesečníky S_1 , A_2 neležia na ordinále ($S_1 A_2 \not\parallel x_{12}$)



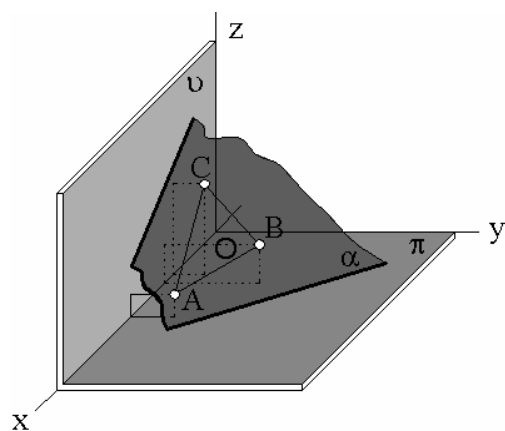
Obr. 37

3.4, OBRAZ ROVINY - útvar U – rovina

Rovina je určená združenými priemetmi určujúcich prvkov.

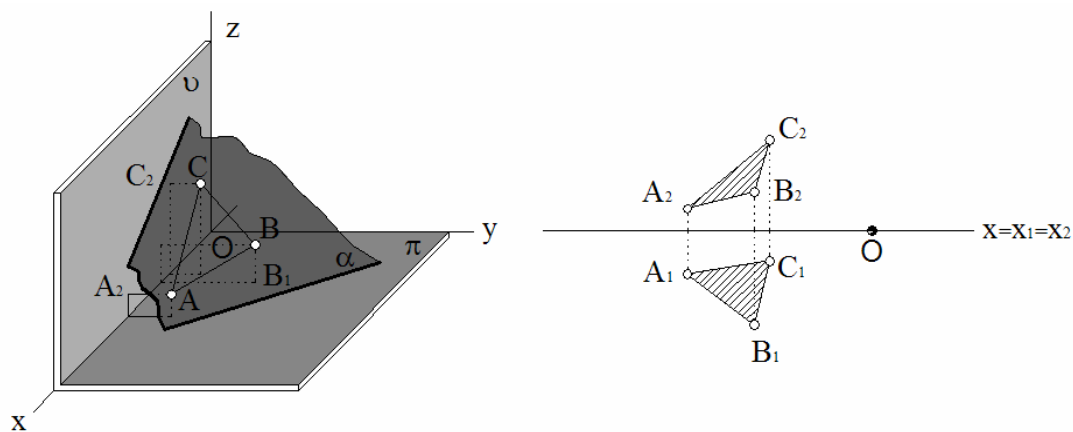
▣ tri nekolineárne body

$$\alpha = \overleftrightarrow{ABC}$$



Obr. 38

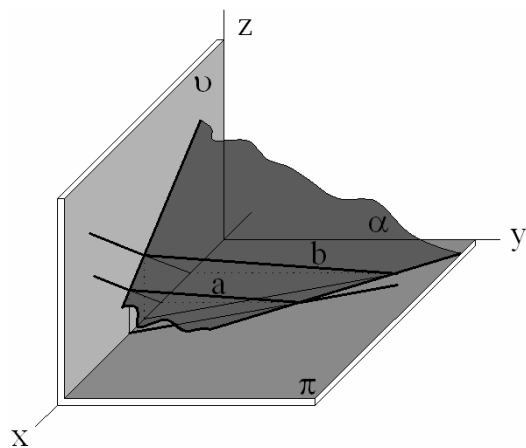
A, B, C ($A_1 B_1 C_1$; $A_2 B_2 C_2$)



Obr. 39

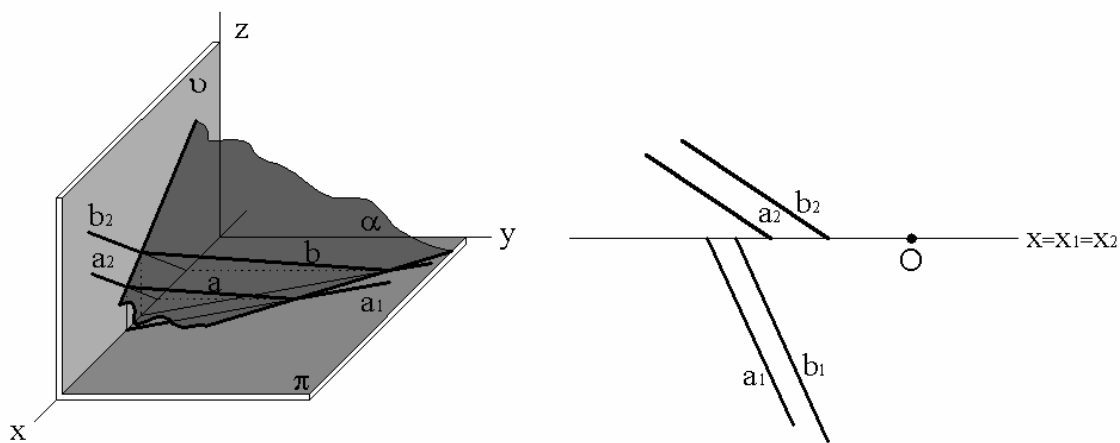
▣ dve rôzne rovnobežky

$$\alpha = \overleftrightarrow{ab}, a \parallel b, a \cap b = \emptyset$$



Obr. 40

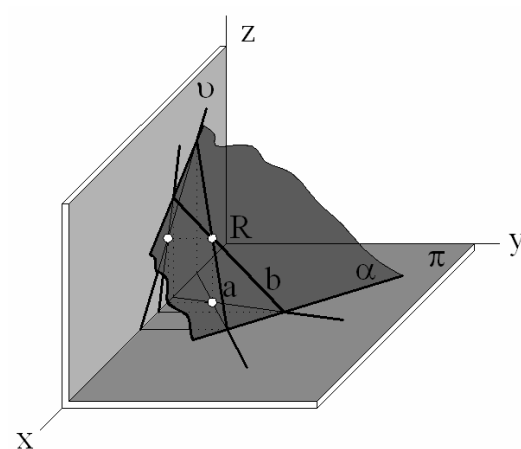
Zápis: $a \parallel b$ ($a_1 \parallel b_1; a_2 \parallel b_2$)



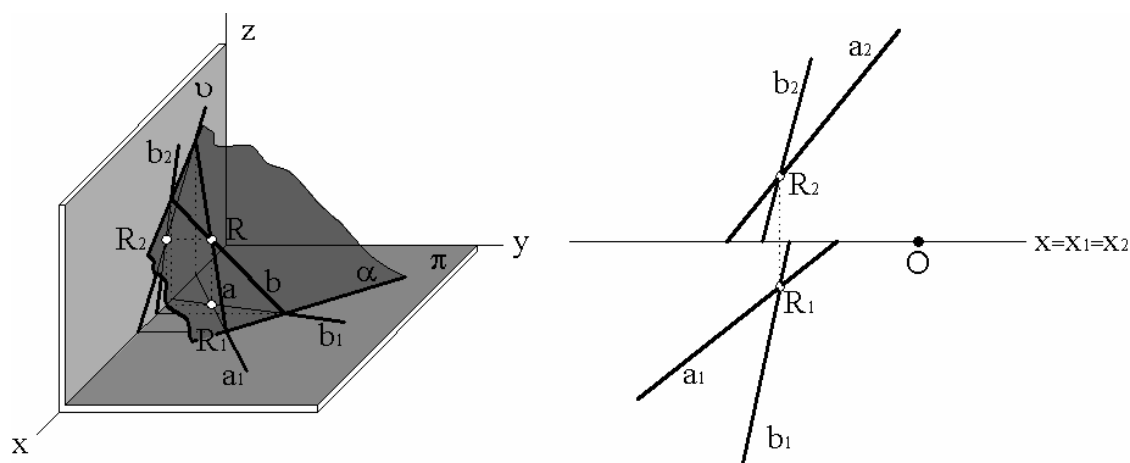
Obr. 41

▣ dve rôznobežky

$$\alpha = \overleftrightarrow{ab}, a \cap b = \{R\}$$



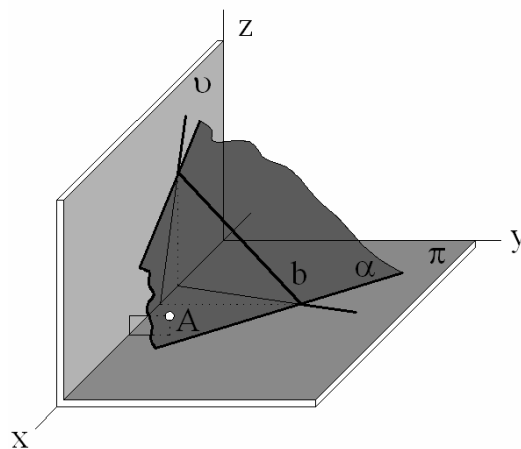
Obr. 42



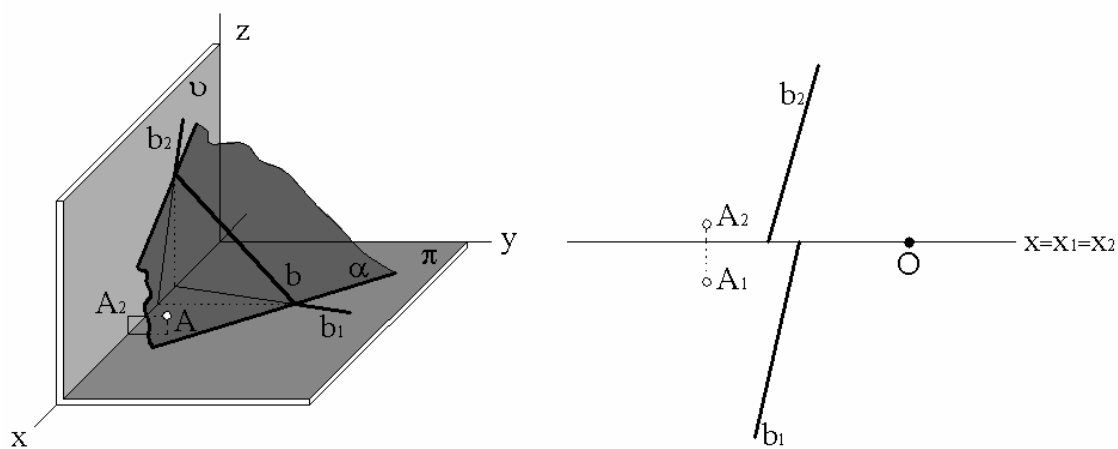
Obr. 43

▣ bod a priamka neincidentná s daným bodom

$$\alpha = \overleftrightarrow{Ab}, A \notin b$$

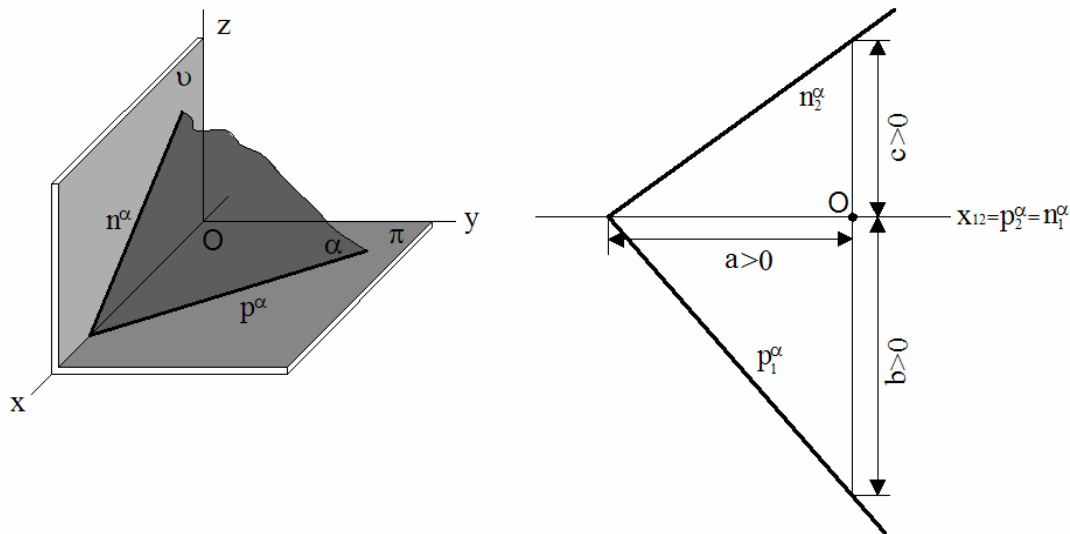


Obr. 44



Obr. 45

Významné rôznobežky roviny:



Obr. 46

- **p^α - pôdorysná stopa roviny** – priesečnica roviny s priemetňou π ,
ak existuje, $p^\alpha = \alpha \cap \pi$
- **n^α - nárysna stopa roviny** – priesečnica roviny s priemetňou v , ak
existuje, $n^\alpha = \alpha \cap v$

$\alpha = p^\alpha n^\alpha$ (združené priemety pôdorysnej a nárysnej stopy $p_1^\alpha, p_2^\alpha, n_1^\alpha, n_2^\alpha$)

Súradnice bodov prieniku roviny a súradnicových osí, ak existujú:

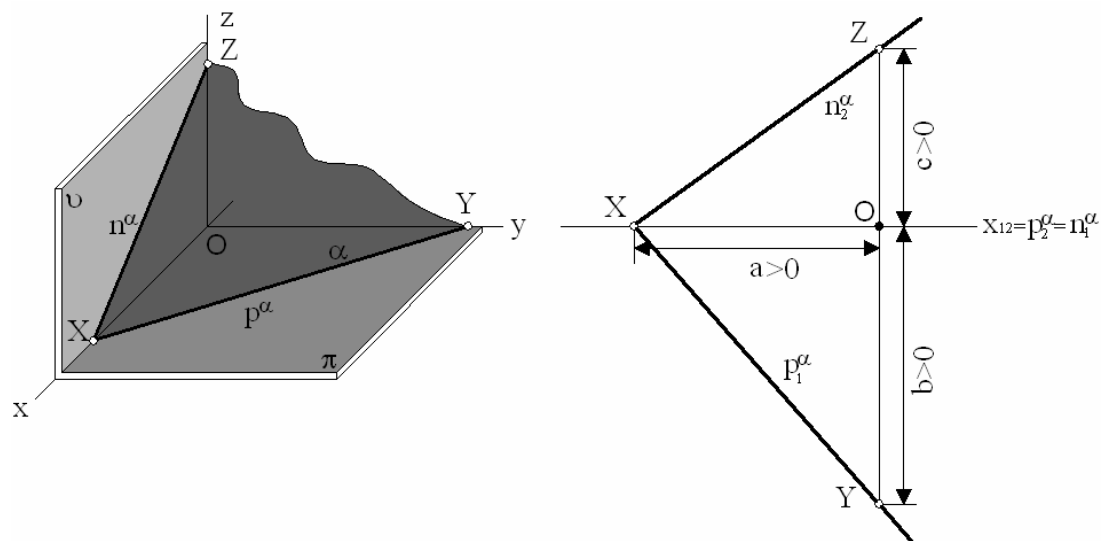
$$X = \alpha \cap x = (a, 0, 0)$$

$$Y = \alpha \cap y = (0, b, 0)$$

$$Z = \alpha \cap z = (0, 0, c)$$

Zápis $\alpha = p^\alpha n^\alpha = (a, b, c)$. Ak je rovina rovnobežná so súradnicovou osou, zapíšeme na príslušnú pozíciu symbol ∞ .

$$\alpha(p^\alpha, n^\alpha) = (a, b, c) = [X(a, 0, 0) Y(0, b, 0) Z(0, 0, c)]$$

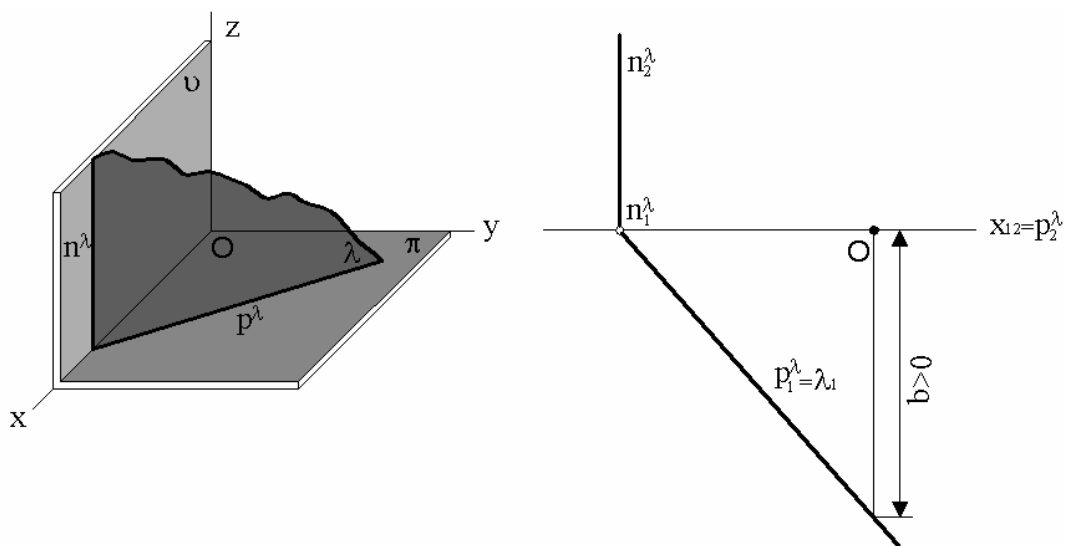


Obr. 47

Špeciálne roviny:

■ **prvá premietacia rovina** – rovina kolmá na priemetňu π

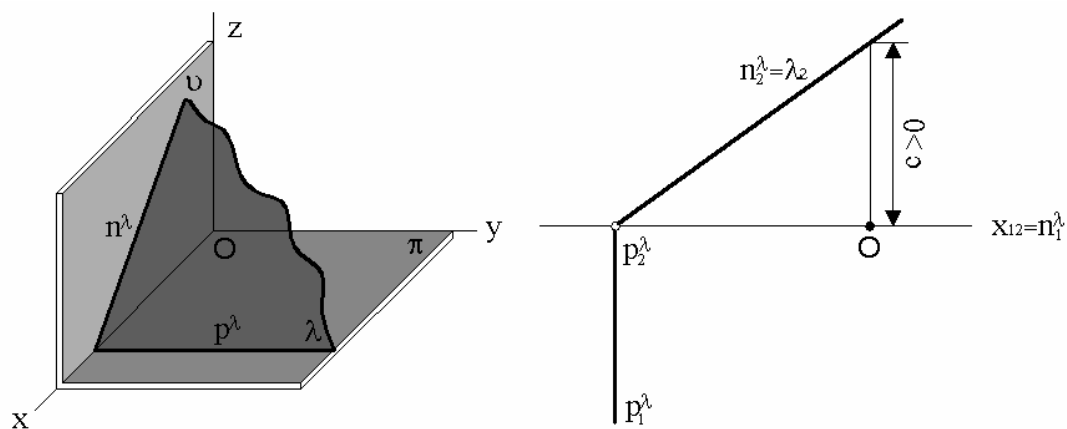
$$\lambda \perp \pi; \lambda (a, b, \infty)$$



Obr. 48

▣ druhá premietacia rovina – rovina kolmá na priemetňu v

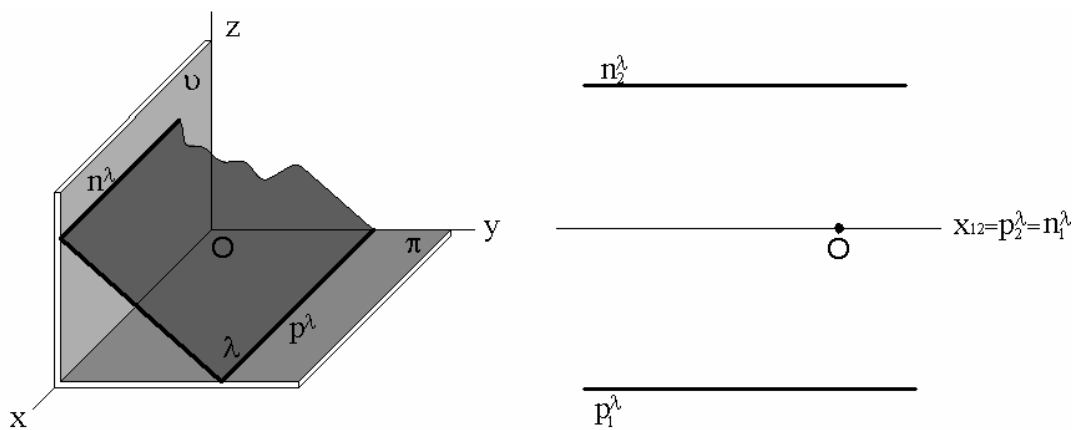
$$\lambda \perp v; \lambda(a, \infty, c)$$



Obr. 49

▣ rovina rovnobežná so základnicou x

$$\lambda \parallel x; \lambda(\infty, b, c)$$

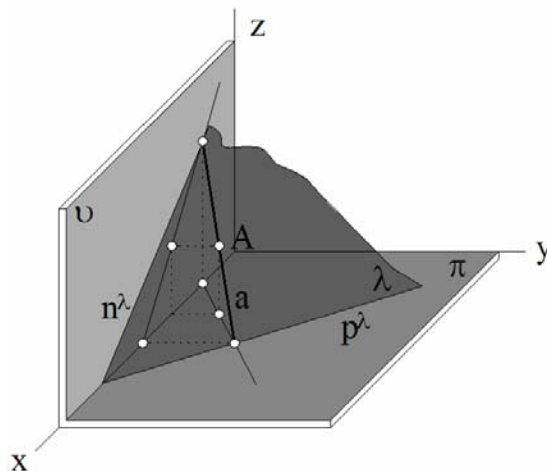


Obr. 50

3.4.1, OBRAZ BODU A PRIAMKY V ROVINE - útvar U– bod A, priamka a, rovina λ

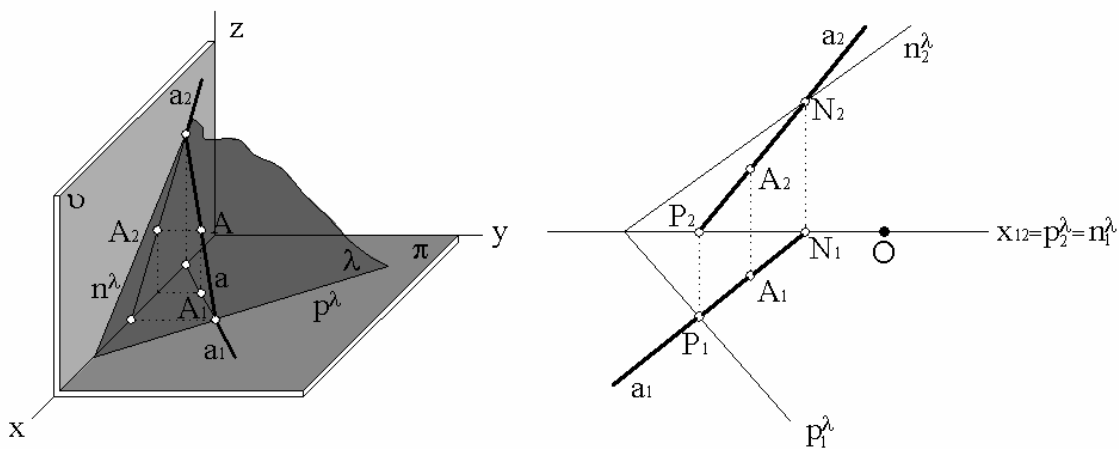
Bod leží v rovine práve vtedy, keď leží na priamke roviny.

$$A \in a, a \subset \lambda \Leftrightarrow A \in \lambda$$



Obr. 51

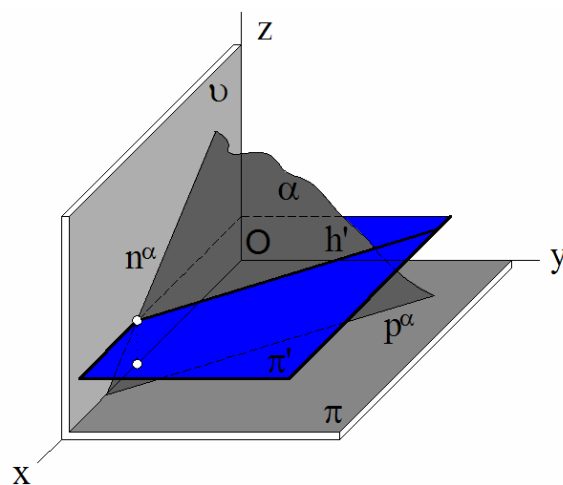
■ priamka v rovine určenej stopami: pôdorysný stopník priamky leží na pôdorysnej stope roviny a nárysny stopník priamky na jej nárysnej stope.



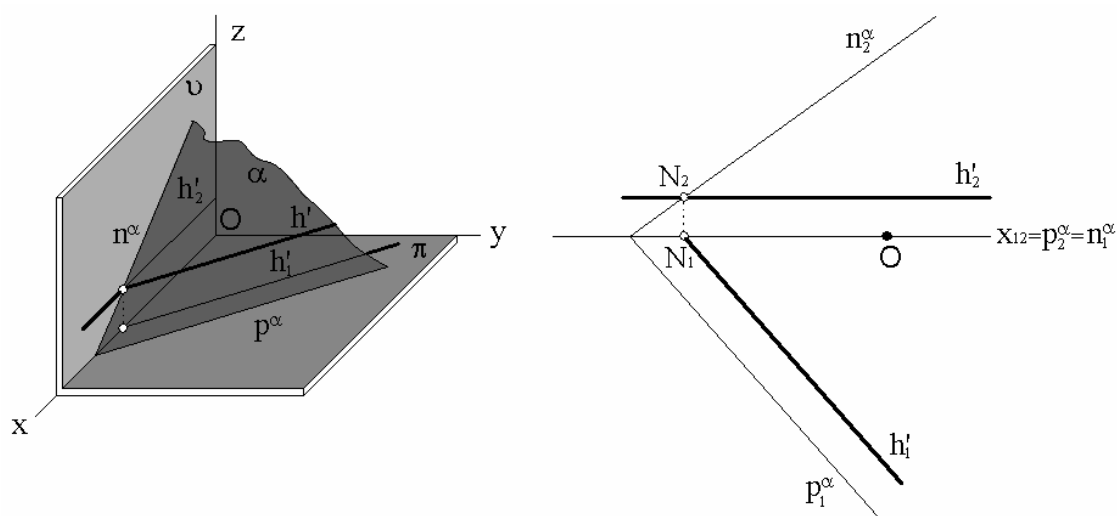
Obr. 52

Významné priamky roviny (rovina nemá špeciálnu polohu) :

- ▣ **hlavná priamka I. osnovy** – priamka h^I roviny rovnobežná s priemetňou π ; $h^I = \alpha \cap \pi'$, $\pi' \parallel \pi$

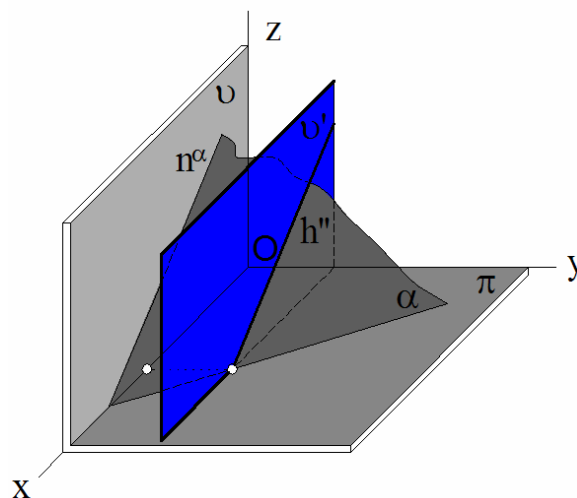


Obr. 53

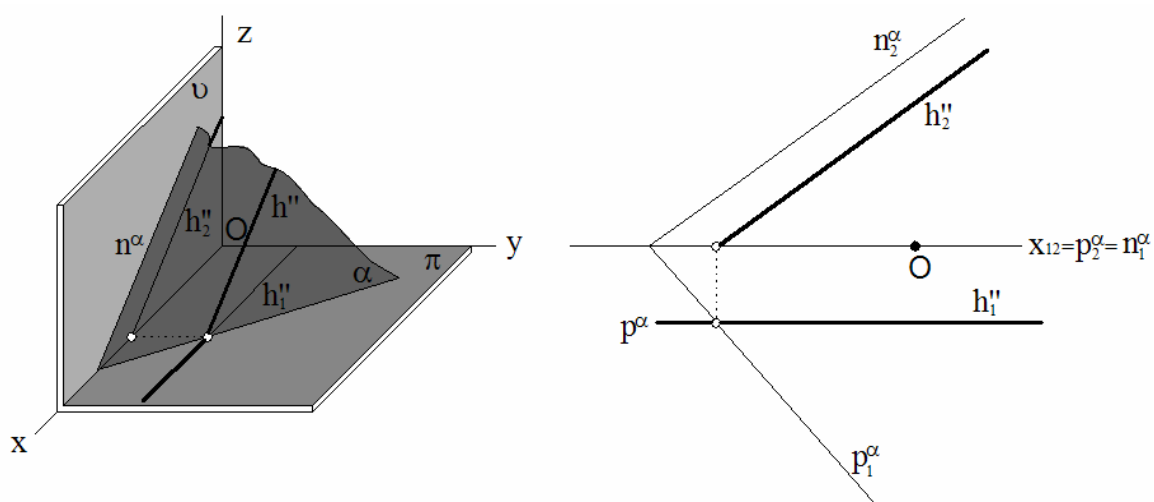


Obr. 54

■ **hlavná priamka II. osnovy** – priamka h^{Π} roviny rovnobežná s priemetňou v ; $h^{\Pi} = \alpha \cap v', v' \parallel v$

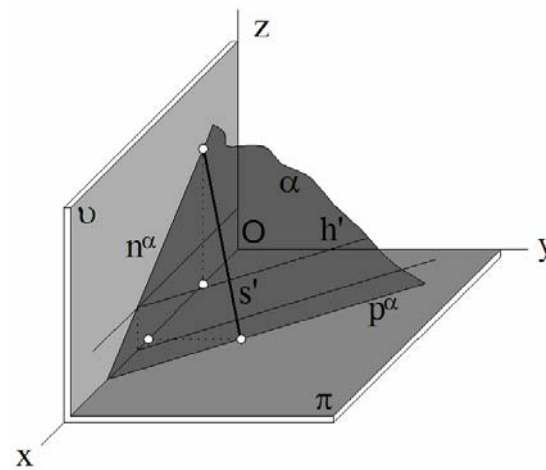


Obr. 55



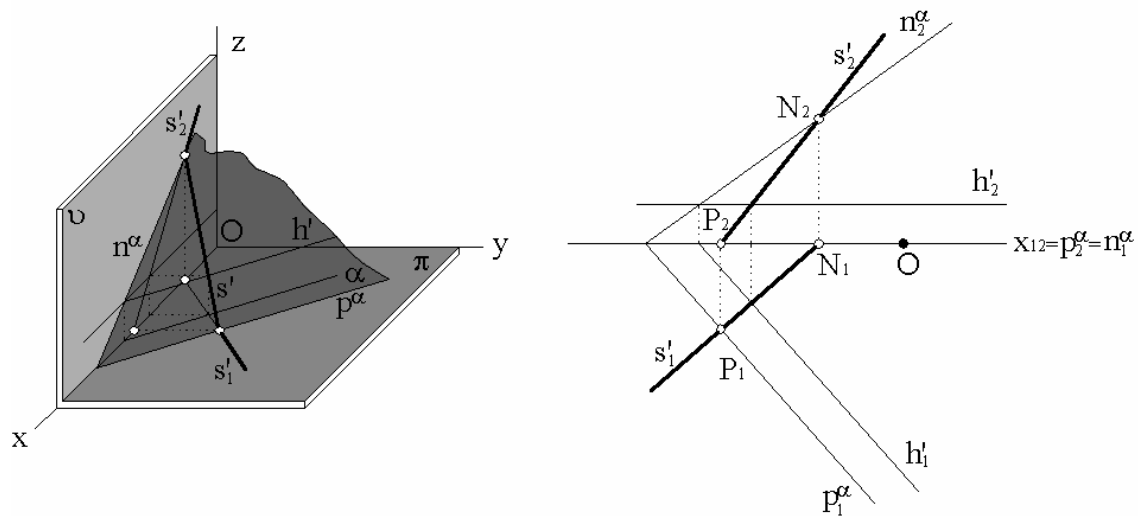
Obr. 56

■ **spádová priamka I. osnovy** – priamka s^I roviny kolmá na hlavné priamky prvej osnovy h^I ; $s^I \perp h^I$



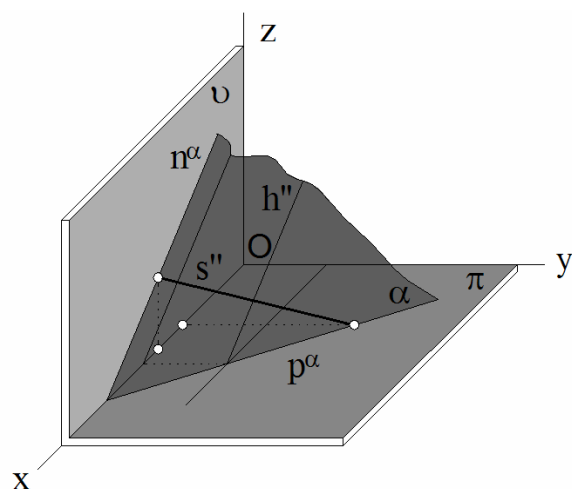
Obr. 57

Veta: Pôdorysy hlavných a spádových priamok prvej osnovy sú navzájom kolmé; $\mathbf{s}^I \perp \mathbf{h}^I, \mathbf{h}^I | \pi \Rightarrow \mathbf{s}_1^I \perp \mathbf{h}_1^I$.



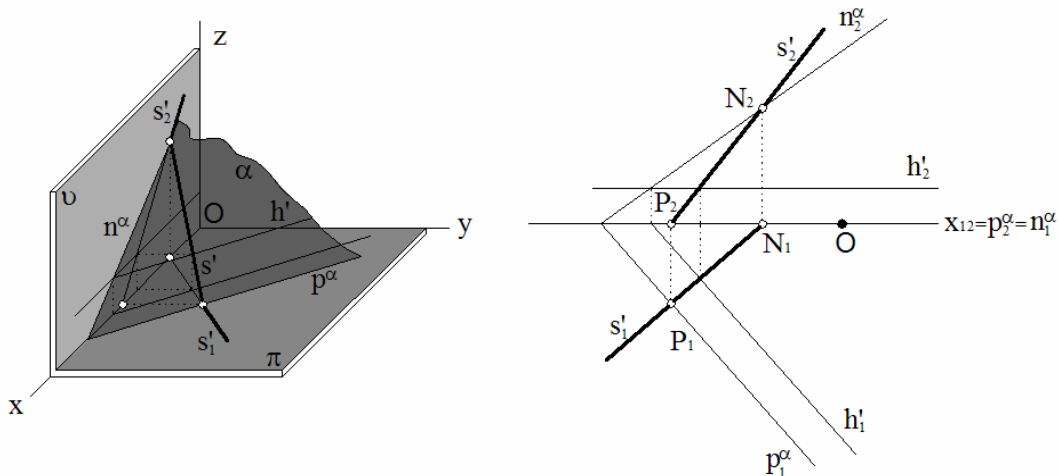
Obr. 58

▣ spádová priamka II. osnovy – priamka s^{II} roviny kolmá na hlavné priamky druhej osnovy h^{II} ; $s^{\text{II}} \perp h^{\text{II}}$



Obr. 59

Veta: Nárisy hlavných a spádových priamok druhej osnovy sú navzájom kolmé; $s^{\text{II}} \perp h^{\text{II}}$, $h^{\text{II}} \parallel v \Rightarrow s_2^{\text{II}} \perp h_2^{\text{II}}$.



Obr. 60

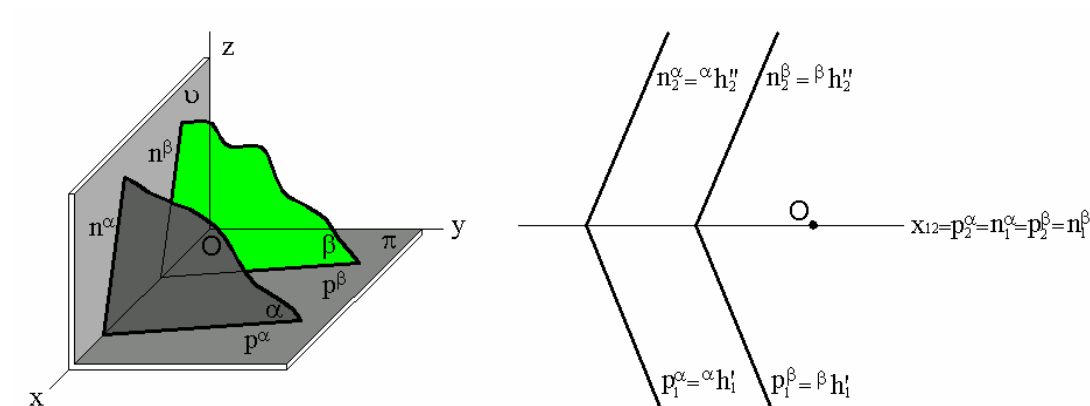
3.4.2, OBRAZ DVOJICE ROVÍN - útvar U – dvojica rovín

Dve roviny a ich združené priemety:

▣ **rovnobežné roviny**

$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow {}^{\alpha}h^I \parallel {}^{\beta}h^I, {}^{\alpha}h^{II} \parallel {}^{\beta}h^{II}$

združené priemety ${}^{\alpha}h^I_1 \parallel {}^{\beta}h^I_1, {}^{\alpha}h^{II}_2 \parallel {}^{\beta}h^{II}_2$

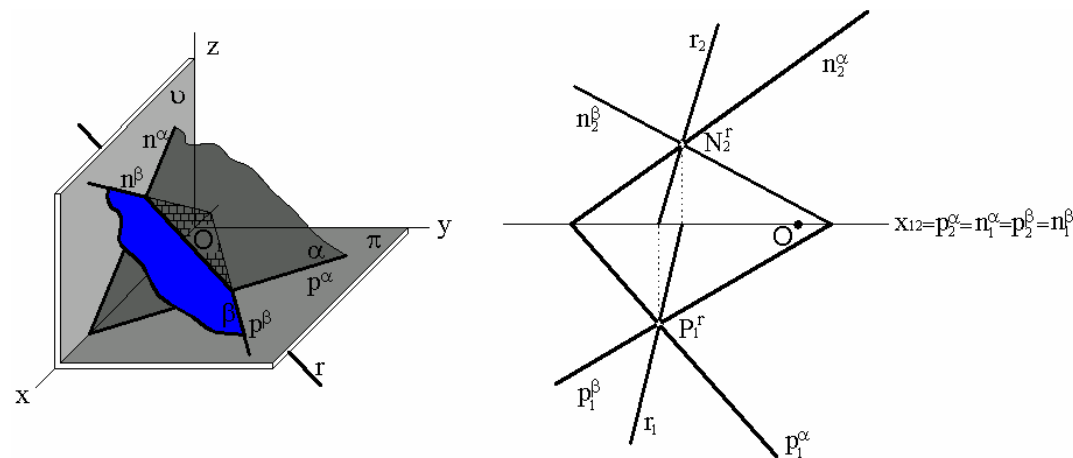


Obr. 61

▣ **rôznobežné roviny**

$\alpha \cap \beta = r$ – **priesečnica**

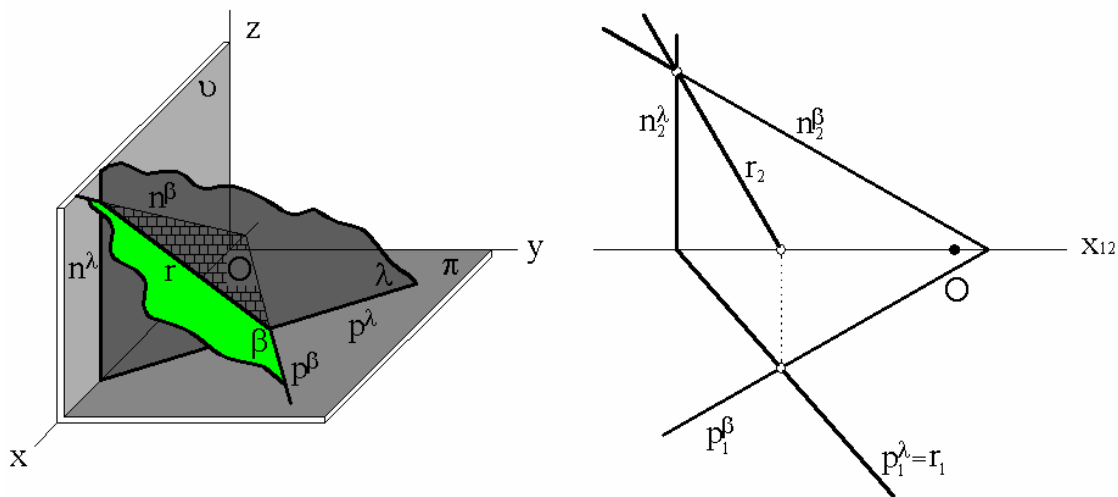
združené priemety **priesečnice r** (r_1, r_2)



Obr. 62

Roviny v špeciálnych polohách vzhľadom na priemetne:

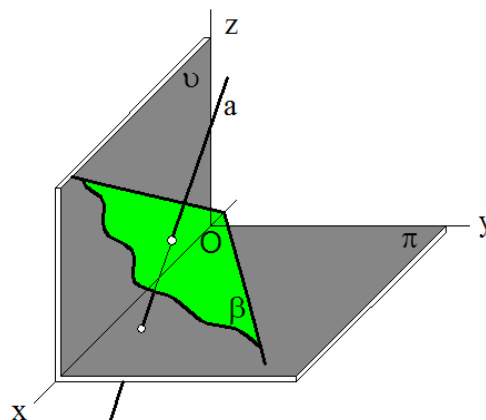
■ $\lambda \perp \pi$



Obr. 63

3.5, **V** ZÁJOMNÁ POLOHA PRIAMKY A ROVINY

Priamka a rovina vo všeobecnej polohe vzhľadom na súradnicové roviny a základnicu.

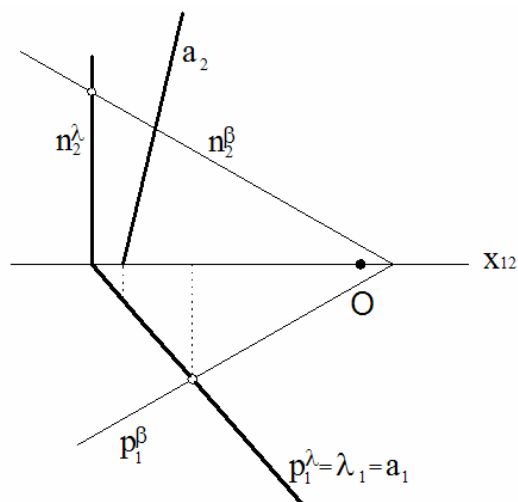
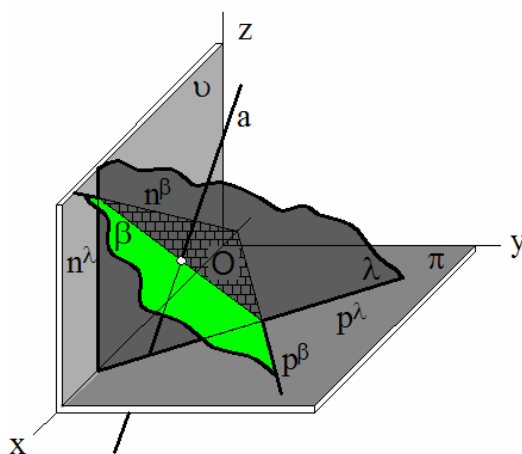


Obr. 64

- vhodná prvá premietacia rovina λ

$$\lambda: a \subset \lambda, \lambda \perp \pi$$

$$\lambda_1: a_1 = \lambda_1$$



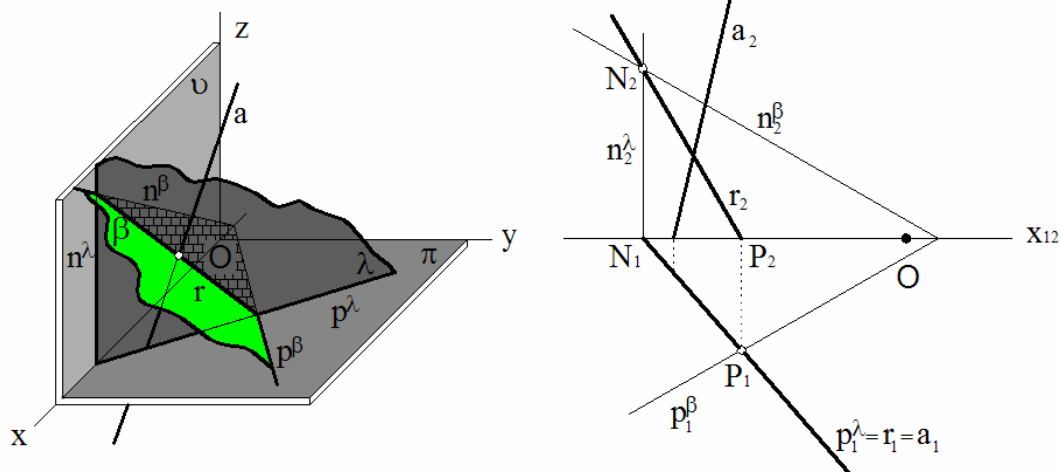
Obr. 65

- **priesečnica rovín λ, β**

$r: \lambda \cap \beta$

$r_1: a_1 = r_1 = P_1 N_1$

$r_2: r_2 = P_2 N_2$



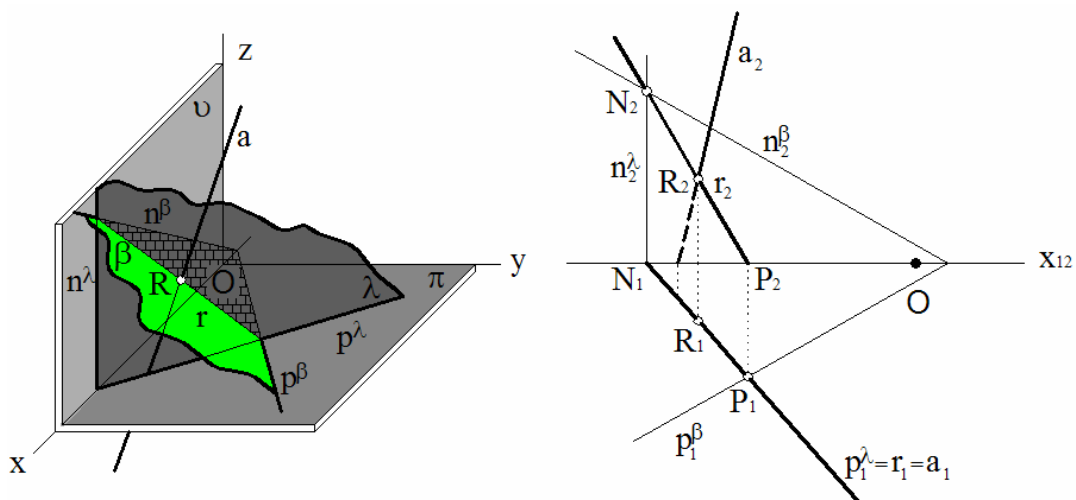
Obr. 66

- **priesečník priamok a, r (ak existuje)**

$R: r \cap a$

$R_2 \in a_2 \cap r_2$

$R_1 \in a_1$

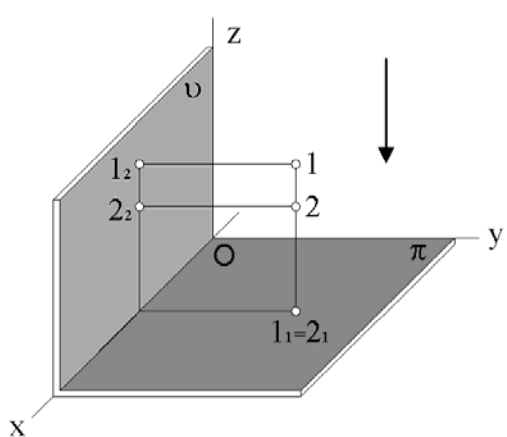


Obr. 67

Poznámka: pri riešení úlohy – prienik priamky s rovinou – je potrebné doplniť viditeľnosť jednej z polpriamok priamky a so začiatkom v bode R vzhľadom na rovinu β .

- určenie viditeľnosti v pôdoryse

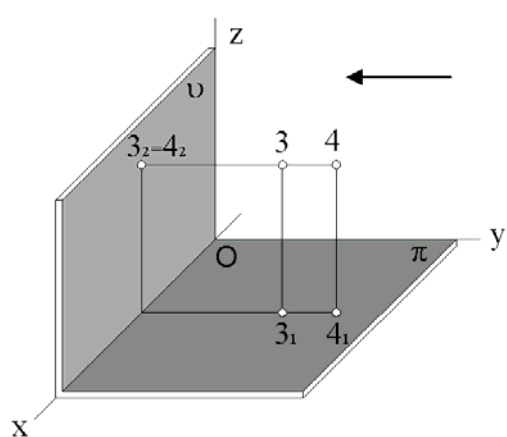
$z_1 > z_2 \Rightarrow$ v pôdoryse je bod 1 vidieť, zakrýva bod 2



Obr. 68

- určenie viditeľnosti v náryse

$y_4 > y_3 \Rightarrow$ v náryse je bod 4 vidieť, zakrýva bod 3



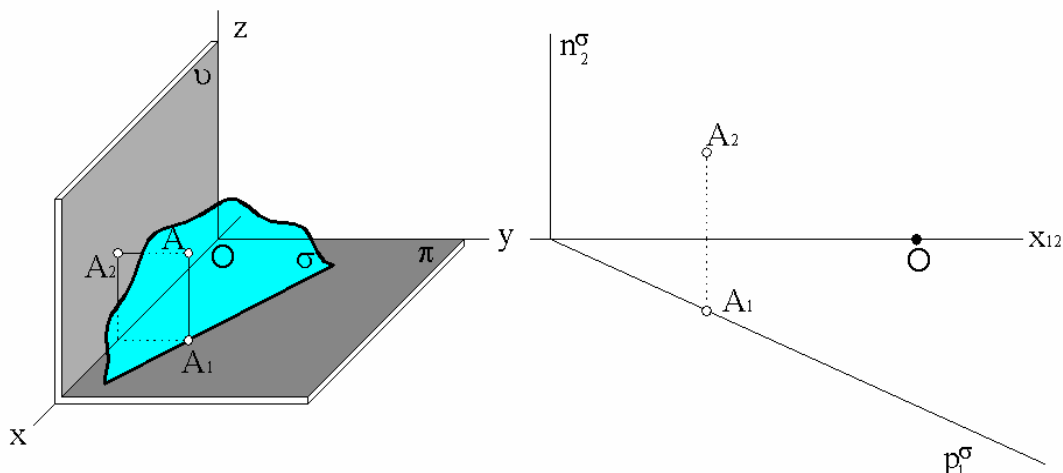
Obr. 69

3.6, SKLÁPANIE ROVINY

Sklápanie roviny: otáčanie roviny kolmej na priemetňu do priemetne

▣ sklápanie roviny σ do prvej priemetne

σ – prvá premietacia rovina, $\sigma \perp \pi$: bod $A \in \sigma$, $A \notin \sigma \cap \pi$, $A(x_A, y_A, z_A)$



Obr. 70

• os otáčania

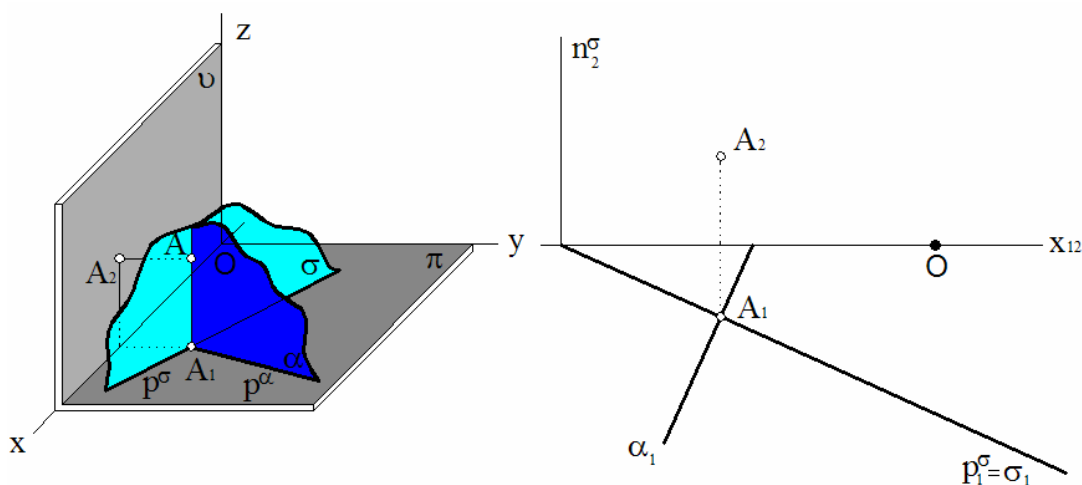
$$\sigma \cap \pi = p^\sigma$$

$$p_1^\sigma = \sigma_1$$

• rovina otáčania bodu A

$$\alpha: A \in \alpha, \alpha \perp p^\sigma \text{ (} p^\sigma \perp p^\alpha \text{)}$$

$$\alpha_1: A_1 \in \alpha_1, \alpha_1 \perp p_1^\sigma$$



Obr. 71

- **stred otáčania bodu A**

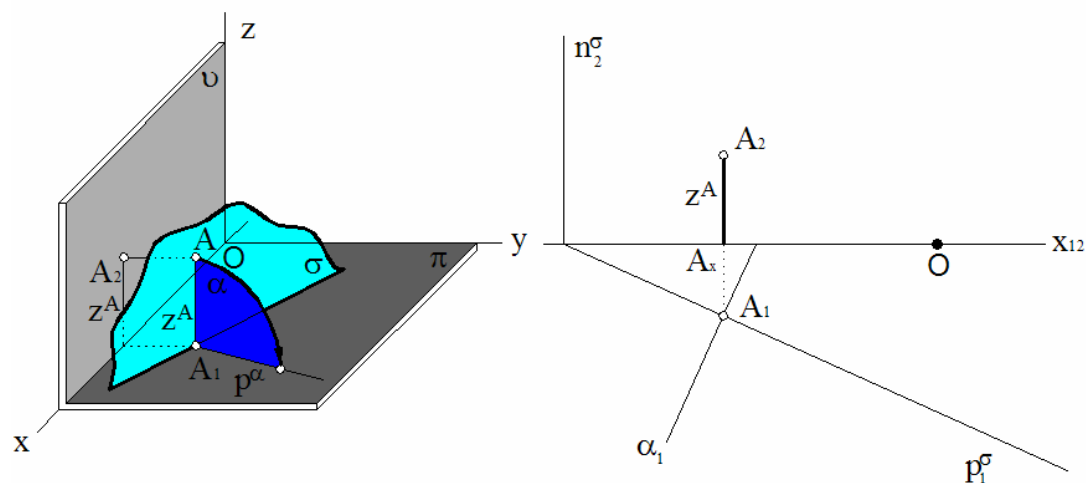
$$\alpha \cap (\sigma \cap \pi) = p^\sigma \cap p^\alpha = A_1$$

$$\alpha_1 \cap \sigma_1 = A_1$$

- **polomer otáčania bodu A**

$$r = |AA_1| = z_A$$

$$r = |A_x A_2| = z_A$$

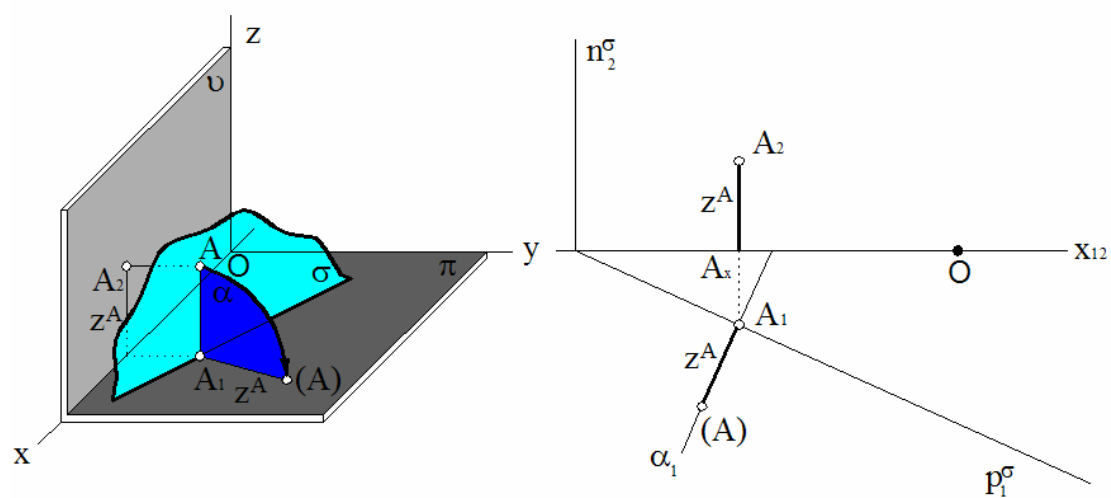


Obr. 72

- **sklopená poloha bodu A**

$$(A): (A) \in p^\alpha, |A_1(A)| = z_A$$

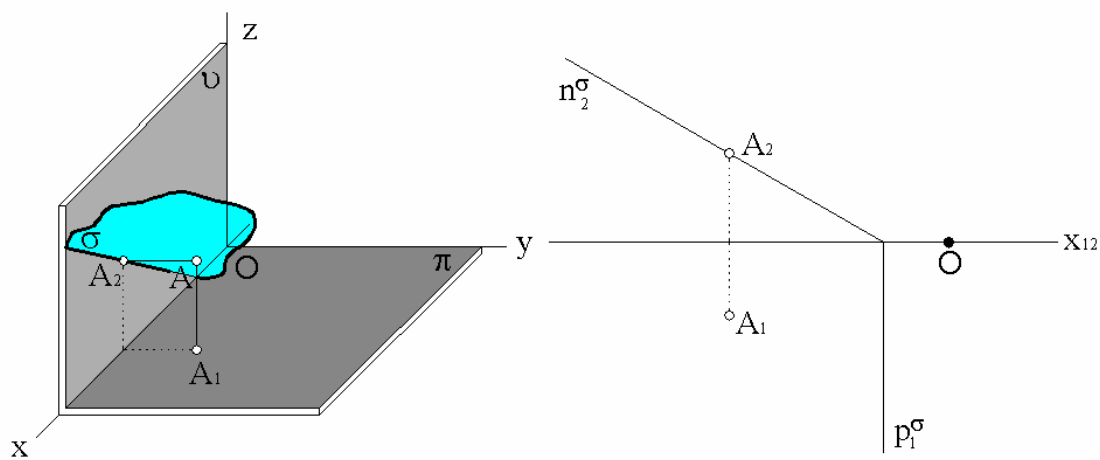
$$(A): (A) \in \alpha_1, |A_1(A)| = z_A$$



Obr. 73

■ sklápánie roviny σ do druhej priemetne

σ – druhá premietacia rovina, $\sigma \perp v$: bod $A \in \sigma$, $A \notin \sigma \cap v$, $A(x_A, y_A, z_A)$



Obr. 74

• os otáčania

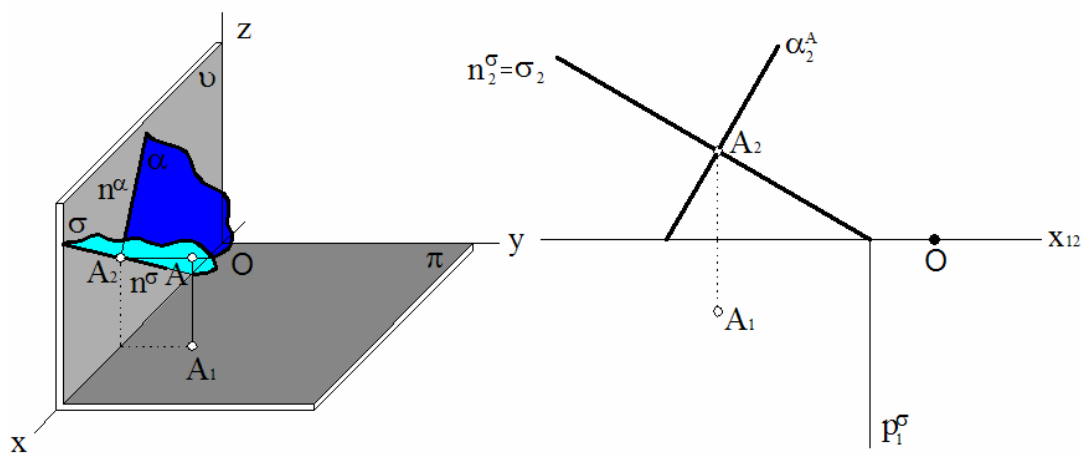
$$\sigma \cap v = n^\sigma$$

$$n_2^\sigma = \sigma_2$$

• rovina otáčania bodu A

$$\alpha: A \in \alpha, \alpha \perp n^\sigma \quad (n^\sigma \perp n^\alpha)$$

$$\alpha_2: A_2 \in \alpha_2, \alpha_2 \perp n_2^\sigma$$



Obr. 75

- **stred otáčania bodu A**

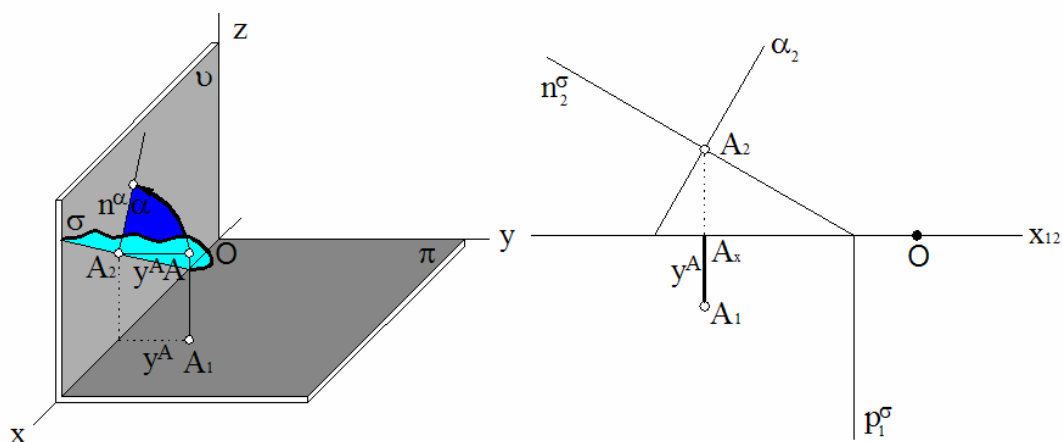
$$\alpha \cap (\sigma \cap \nu) = n^\sigma \cap n^\alpha = A_2$$

$$\alpha_2 \cap \sigma_2 = A_2$$

- **polomer otáčania bodu A**

$$r = |AA_2| = y_A$$

$$r = |A_x A_1| = y_A$$

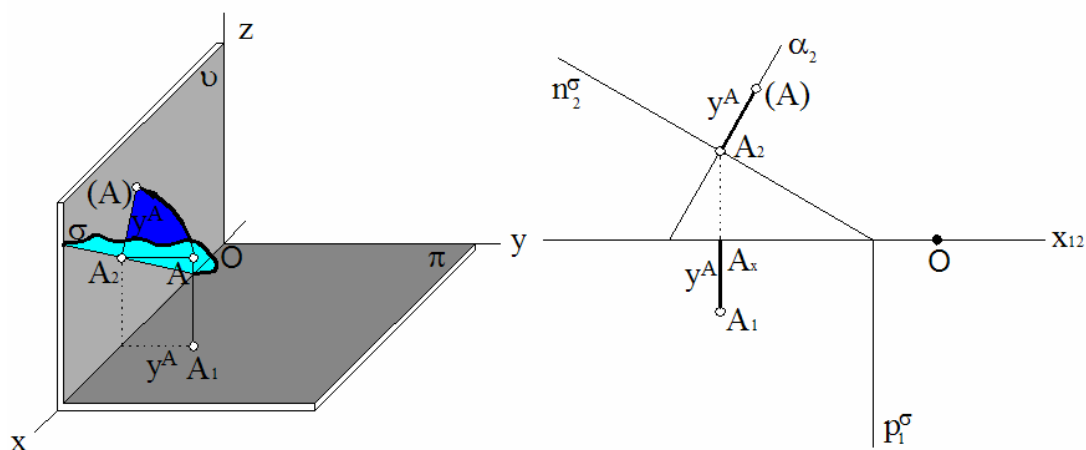


Obr. 76

- **sklopená poloha bodu A**

$$(A): (A) \in n^\alpha, |A_2(A)| = y_A$$

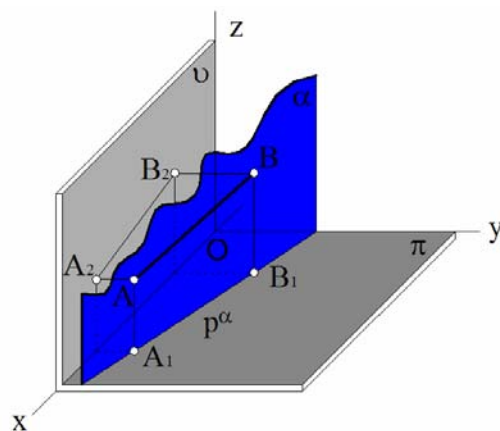
$$(A): (A) \in \alpha_2, |A_2(A)| = y_A$$



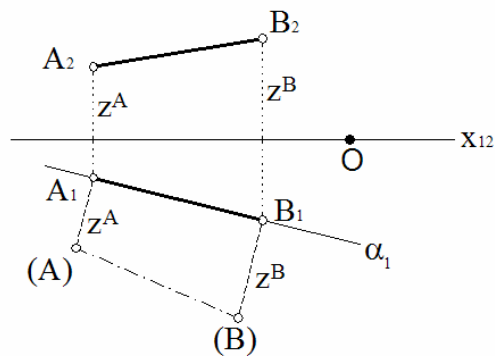
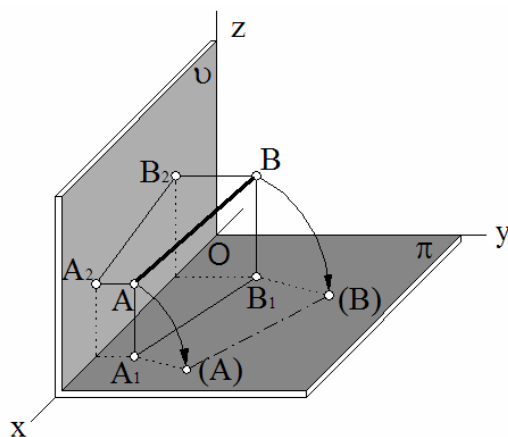
Obr. 77

■ určenie dĺžky úsečky AB

Sklopenie prvej premietacej roviny úsečky do prvej priemetne

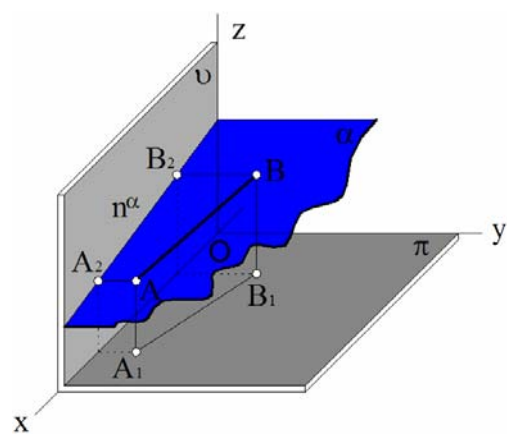


Obr. 78

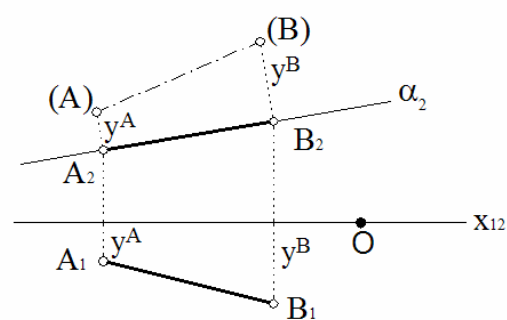
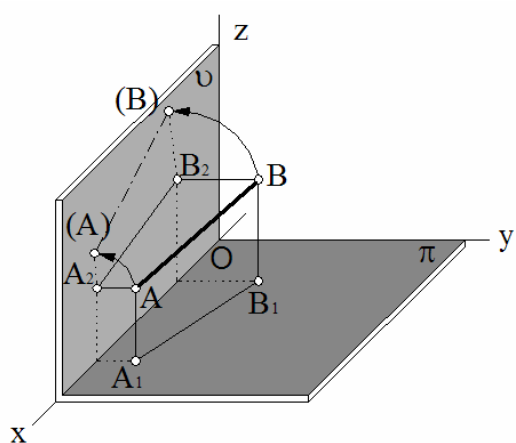


Obr. 79

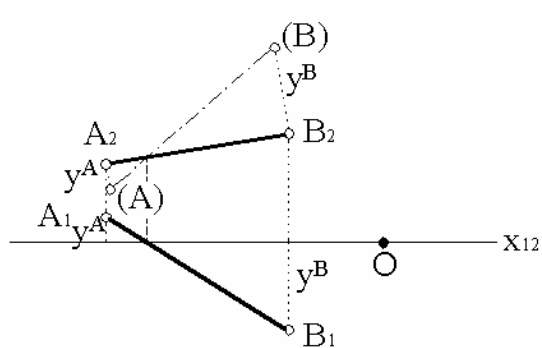
Sklopenie druhej premietacej roviny úsečky do druhej priemetne



Obr. 80



Obr. 81



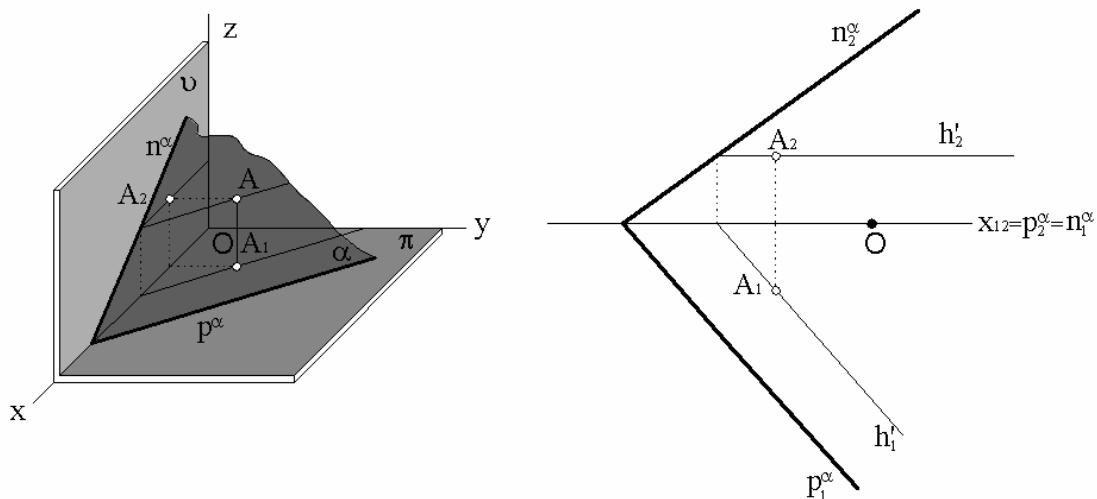
Obr. 82

3.7, OTÁČANIE ROVINY

▣ otáčanie roviny σ do prvej priemetne

α – rovina vo všeobecnej polohe, $\alpha \not\perp \pi$, $\alpha \not\parallel \pi$

bod $A \in \alpha$, $A \notin \alpha \cap \pi$, $A(x_A, y_A, z_A)$



Obr. 83

• os otáčania

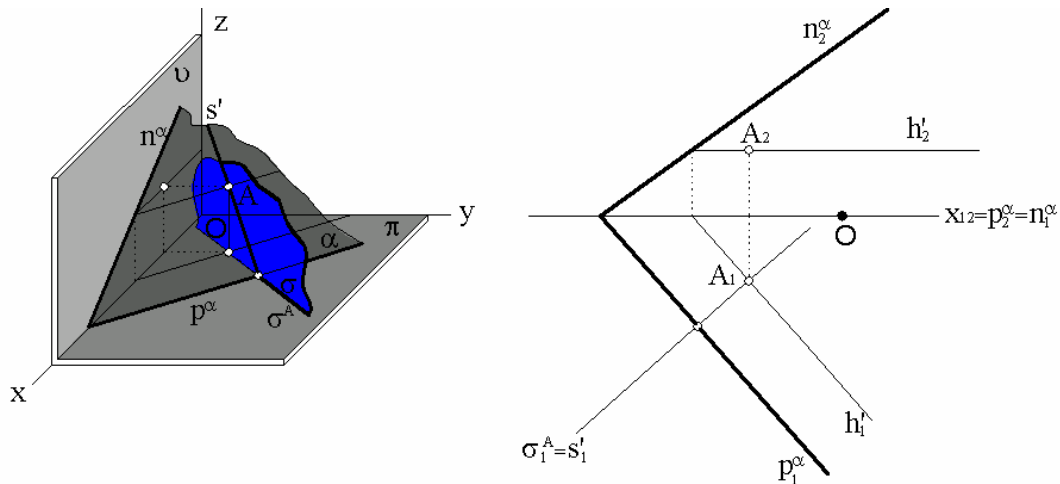
$$\alpha \cap \pi = p^\alpha$$

$$p_1^\alpha$$

• rovina otáčania bodu A

$$\sigma: A \in \sigma, \sigma \perp p^\alpha, \sigma \cap \alpha = s^I$$

$$\sigma_1: A_1 \in \sigma_1, \sigma_1 \perp p_1^\alpha, s_1^I: s_1^I = \sigma_1$$



Obr. 84

- **stred otáčania bodu A**

$$S: \sigma \cap (\alpha \cap \pi) = p^\sigma \cap p^\alpha$$

$$S_1: \sigma_1 \cap p_1^\alpha$$

S – pôdorysný stopník spádovej priamky I. osnovy

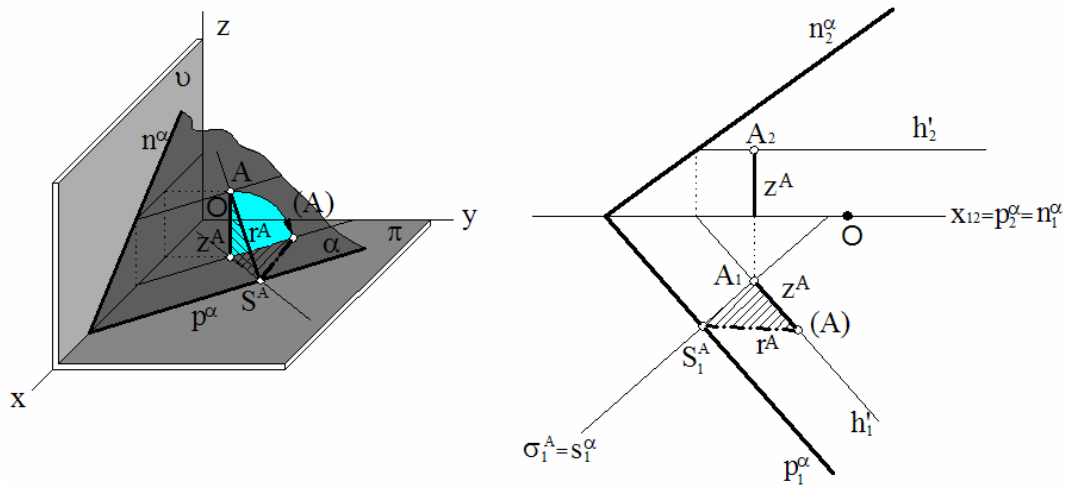
- **polomer otáčania bodu A**

konštrukcia dĺžky úsečky AS^A v sklopení premietacej roviny σ do priemetne π

$$(A): (A) \in h_1^I, |A_1(A)| = z_A, r = |(A)S|$$

$$r = |AS^A| = r^A$$

$$r = |(A)S^A| = r^A$$

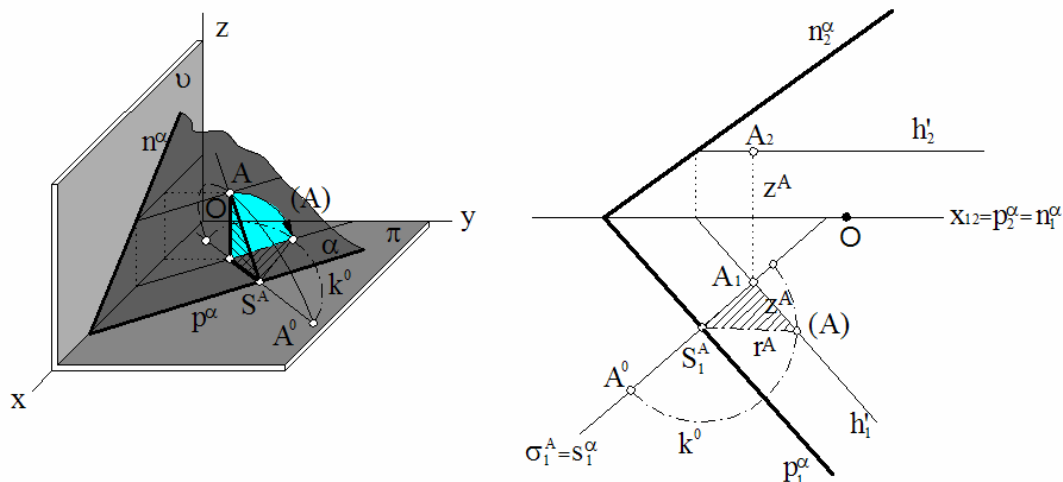


Obr. 85

- **otočená poloha bodu A**

$$A^o: A^o \in p^\sigma, |A^oS| = |SA|$$

$$A^o: A^o \in \sigma_1 (= s_1^a), |A^oS_1| = |S_1(A)|$$



Obr. 86

Veta: Medzi pôdorysmi bodov roviny α ($\alpha \not\parallel \pi$, $\alpha \not\parallel \pi$) a otočenými polohami bodov do prvej priemetne je vzťah pravouhlej osovej afinity*, ktorej osou je prvý priemet pôdorysnej stopy roviny α .

Zápis: $f_1: (\pi_1) \rightarrow (\pi_1^0)$

$f_1(p_1^\alpha - os, A_1, A_1^0)$

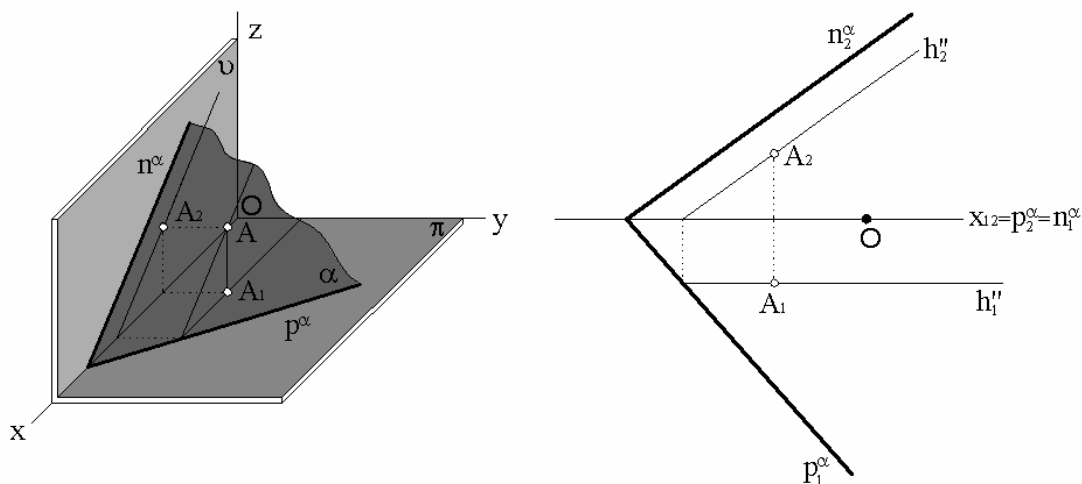
t. j. medzi rovinným poľami (π_1) a (π_1^0) je vzťah pravouhlej osovej afinity

* predpokladáme, že vlastnosti osovej afinity sú čitateľovi známe

▣ otáčanie roviny σ do druhej priemetne

α – rovina vo všeobecnej polohe, $\alpha \not\perp v$, $\alpha \not\parallel v$

bod $A \in \alpha$, $A \notin \alpha \cap v$, $A(x_A, y_A, z_A)$



Obr. 87

• os otáčania

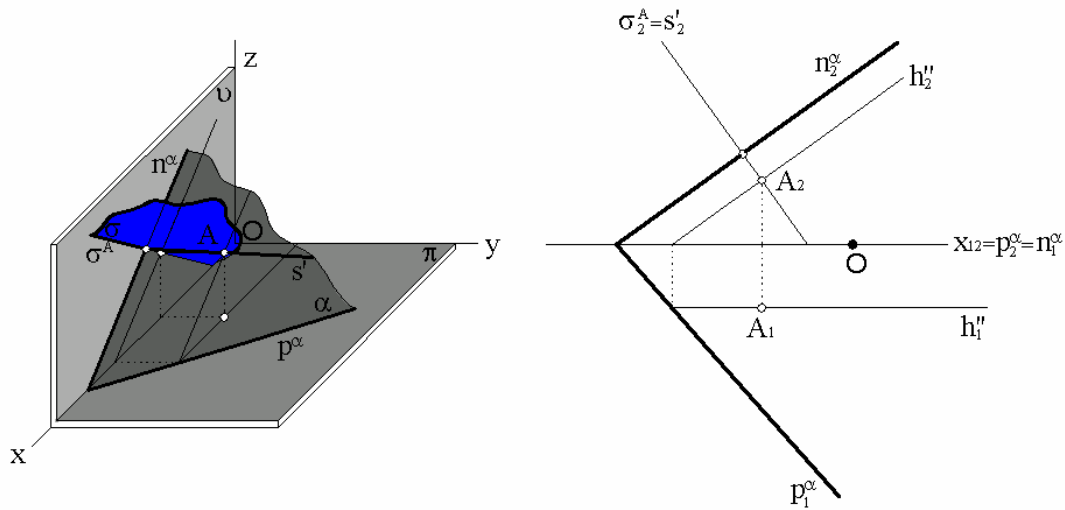
$$\alpha \cap v = n^\alpha$$

$$n_2^\alpha$$

• rovina otáčania bodu A

$$\sigma: A \in \sigma, \sigma \perp n^\alpha, \sigma \cap \alpha = s^\Pi$$

$$\sigma_2: A_2 \in \sigma_2, \sigma_2 \perp n_2^\alpha, s_2^\Pi: s_2^\Pi = \sigma_2$$



Obr. 88

- **stred otáčania bodu A**

$$S: \sigma \cap (\alpha \cap v) = n^\sigma \cap n^\alpha$$

$$S_2: \sigma_2 \cap n_2^\alpha$$

S – nárysny stopník spádovej priamky II. osnovy

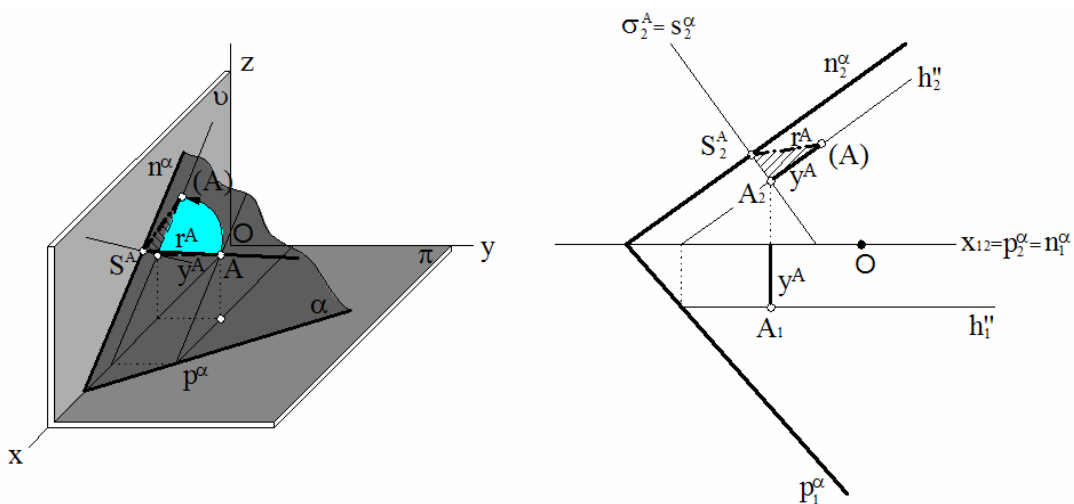
- **polomer otáčania bodu A**

konštrukcia dĺžky úsečky AS^A v sklopení premietacej roviny σ do priemetne v

$$(A): (A) \in h_2^{\Pi}, |A_2(A)| = y_A, r = |(A)S|$$

$$r = |AS^A| = r^A$$

$$r = |(A)S^A| = r^A$$

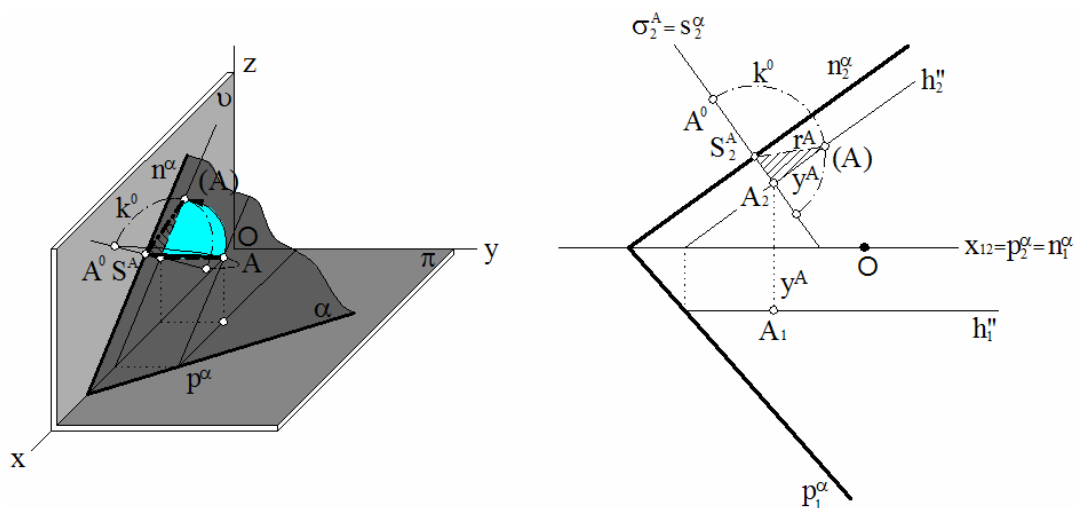


Obr. 89

- **otočená poloha bodu A**

$$A^0: A^0 \in n^\sigma, |A^0 S| = |SA|$$

$$A^0: A^0 \in \sigma_2 (= s_2^a), |A^0 S_2| = |S_2(A)|$$



Obr. 90

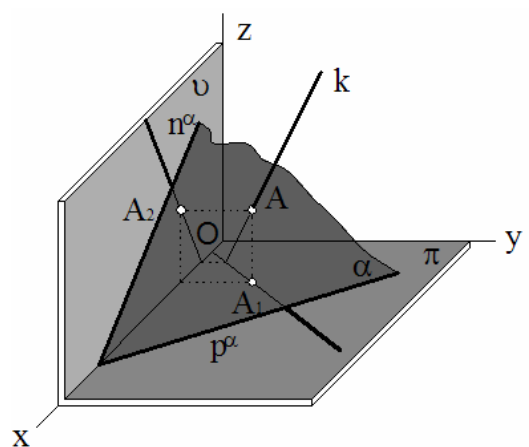
Veta: Medzi nárysmi bodov roviny α ($\alpha \not\perp v$, $\alpha \not\parallel v$) a otočenými polohami bodov do druhej priemetne je vzťah pravouhlej osovej afinity, ktorej osou je druhý priemet nárysnej stopy roviny α .

Zápis: $f_2: (v_2) \rightarrow (v_2^0)$

$$f_2(n_2^\alpha - OS, A_2, A_2^0)$$

t. j. medzi rovinným poľami (v_2) a (v_2^0) je vzťah pravouhlej osovej afinity

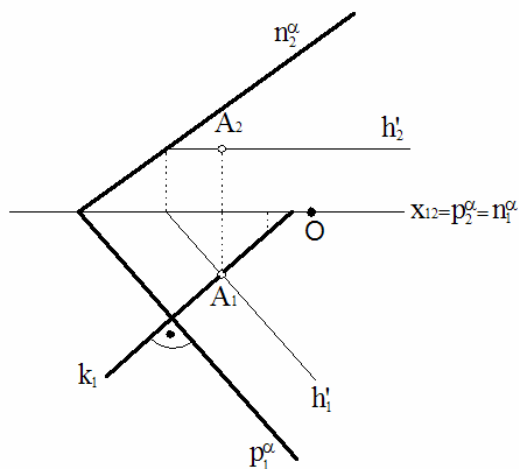
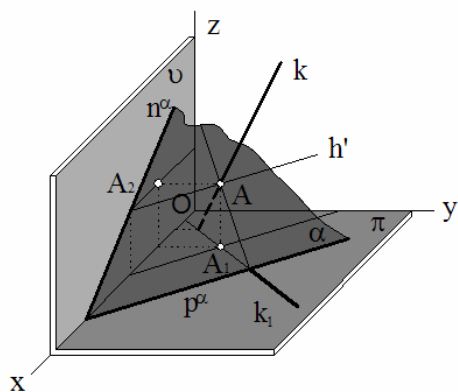
3.8, OBRAZ KOLMICE NA ROVINU - útvar U – priamka kolmá na rovinu



Obr. 91

- $k \perp \alpha \Rightarrow k \perp h^I$
 $k \perp h^I, h^I \parallel \pi$

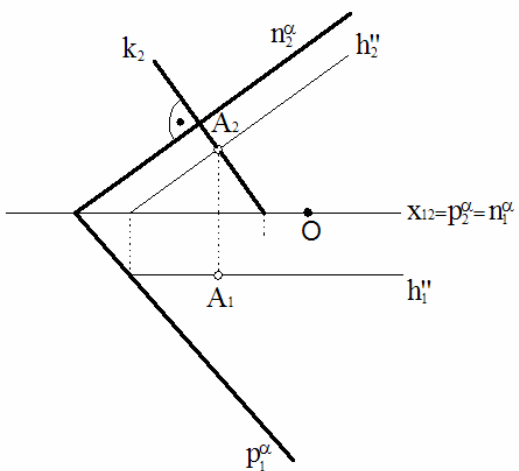
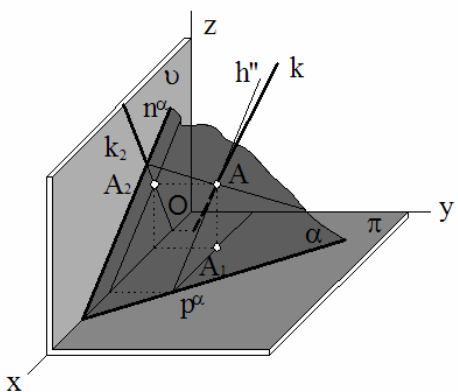
$$k_1 \perp h_1^I$$



Obr. 92

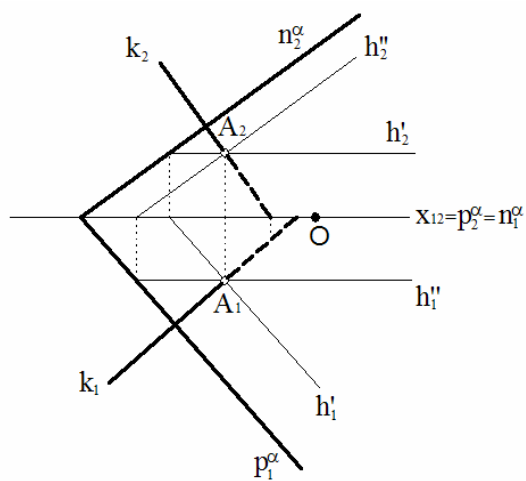
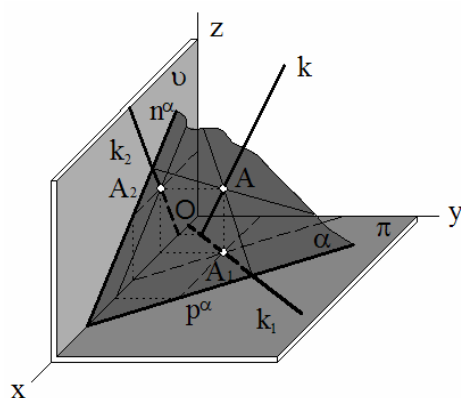
- $k \perp \alpha \Rightarrow k \perp h^{\text{II}}$
 $k \perp h^{\text{II}}, h^{\text{II}} \parallel v$

$$k_2 \perp h^{\text{II}}_2$$



Obr. 93

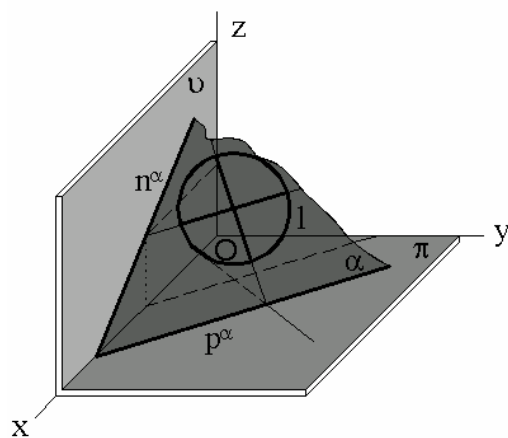
Veta: Priamka k je kolmá na rovinu α ($\alpha \not\parallel x$) práve vtedy, keď jej pôdorys k_1 je kolmý na pôdorys hlavnej priamky prvej osnovy h_1^{I} a nárys k_2 je kolmý na nárys hlavnej priamky druhej osnovy h_2^{II} . (Dôkaz – veta o priemete pravého uhla)



Obr. 94

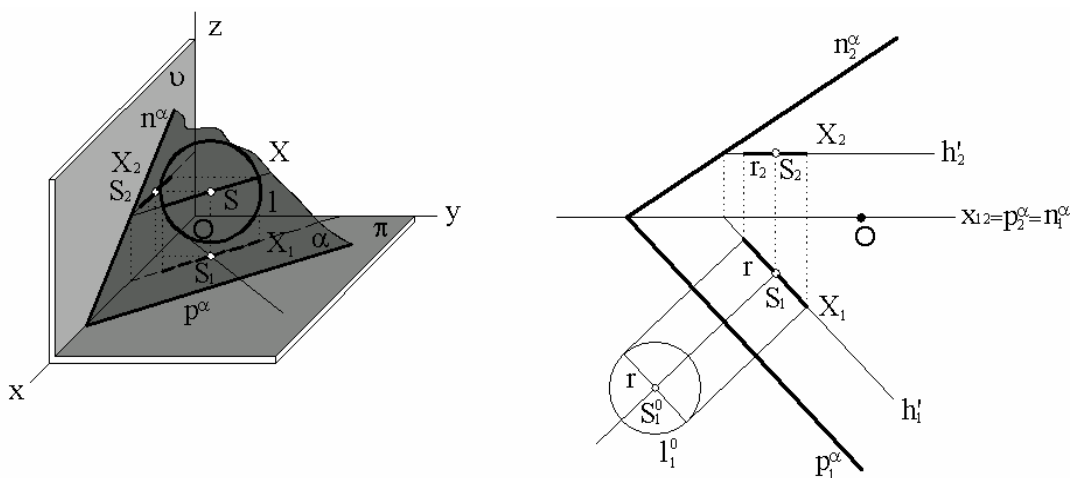
3.9, OBRAZ KRUŽNICE - útvar U – kružnica l $[S, r]$

Nech **kružnica** l leží v rovine α , ktorá má všeobecnú polohu vzhľadom k priemetniam a základnici.



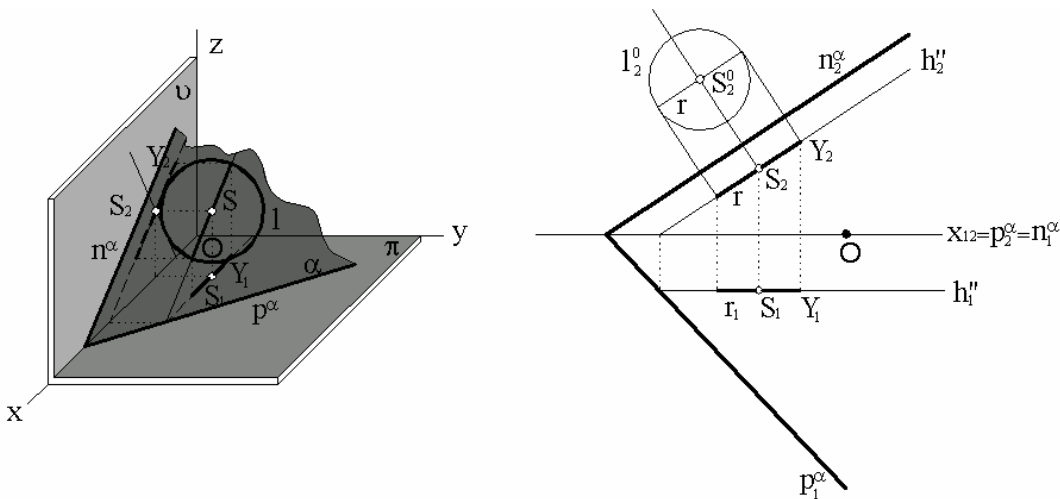
Obr. 95

- ▣ pôdorysom kružnice l je elipsa l_1** , ktorej hlavná os leží na pôdoryse hlavnej priamky I. osnovy a má dĺžku zhodnú s polomerom kružnice (využitie osovej afinity medzi rovinnými poľami (π_1) a (π_1^0))



Obr. 96

- ▣ nárysom kružnice l je elipsa l_2** , ktorej hlavná os leží na náryse hlavnej priamky II. osnovy a má dĺžku zhodnú s polomerom kružnice (využitie osovej afinity medzi rovinnými poľami (v_2) a (v_2^0))

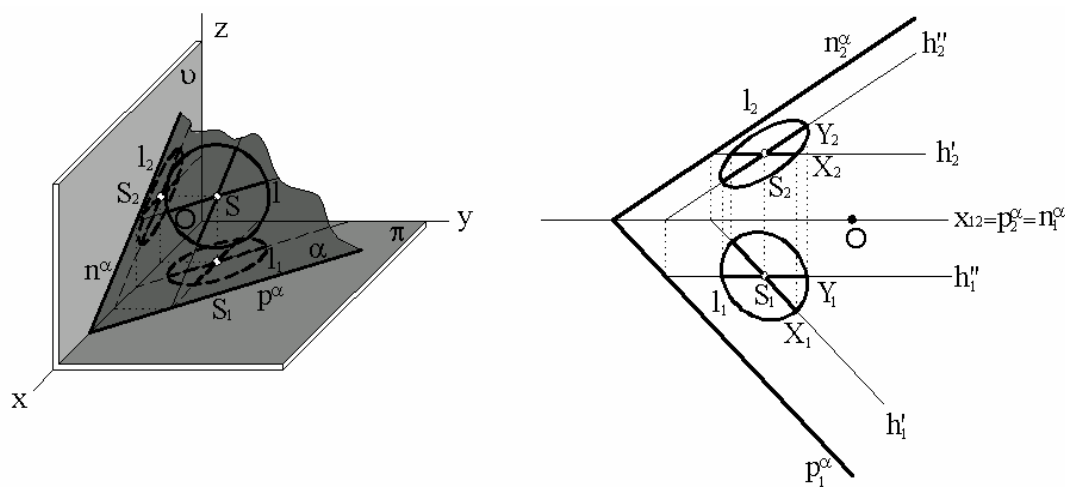


Obr. 97

- ▣ združené priemety kružnice l :**

pôdorys – elipsa l_1 určená hlavnou osou a bodom Y_1

nárys – elipsa l_2 určená hlavnou osou a bodom X_2

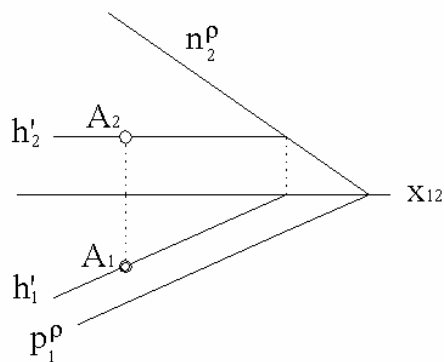
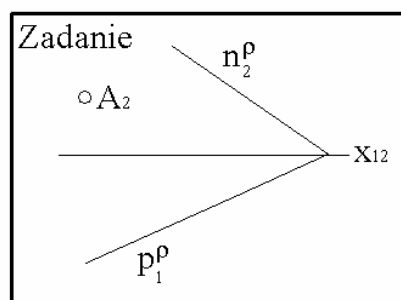


Obr. 98

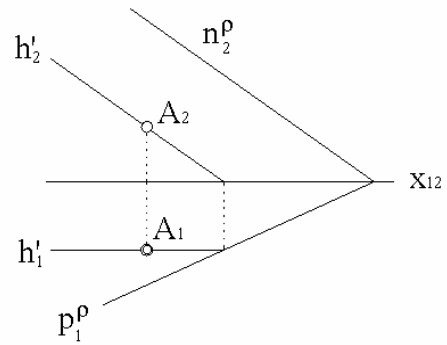
4, VLASTNÉ ÚLOHY, PRÍKLADY

4.1, OBRAZ BODU

- Bod A leží v rovine ρ . Zostrojte chýbajúci prvý priemet bodu A.



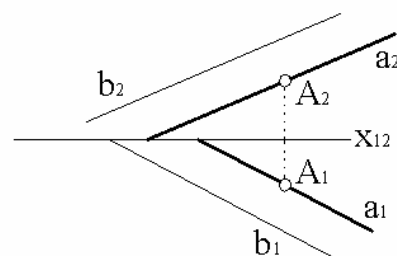
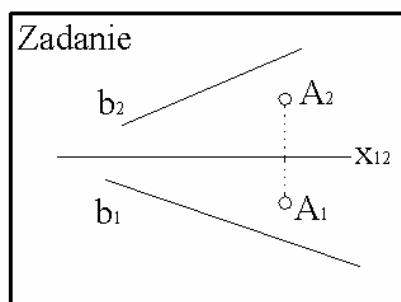
Obr. 99



Obr. 100

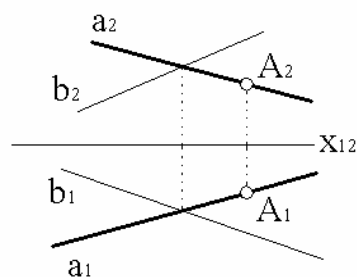
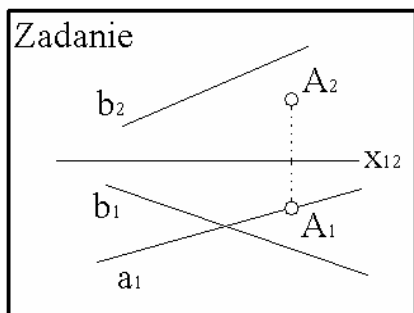
4.2, OBRAZ PRIAMKY

- Daným bodom **A** ved'te priamku **a** rovnobežnú s danou priamkou **b**.



Obr. 101

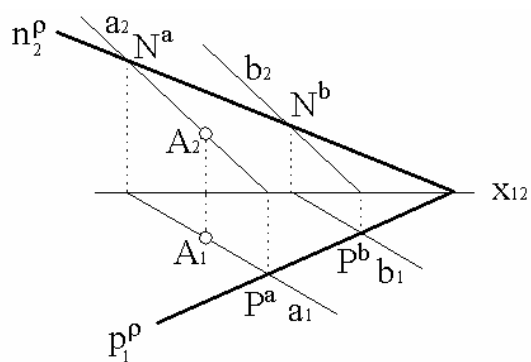
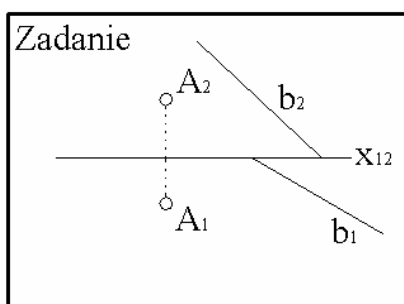
- Daným bodom **A** ved'te priamku **a** rôznobežnú s danou priamkou **b**, ak poznáte prvý priemet priamky **a**.



Obr. 102

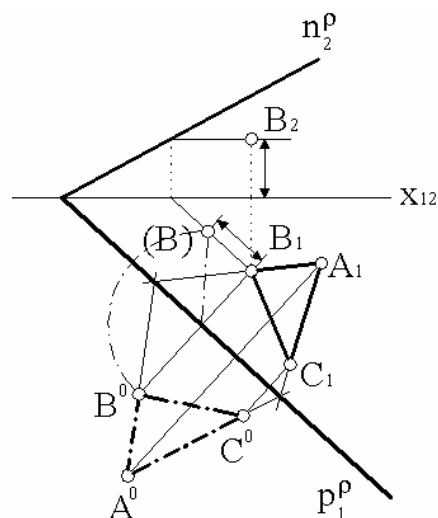
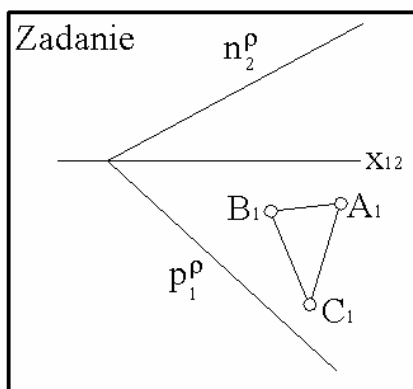
4.3, OBRAZ ROVINY

- Zostrojte stopy roviny ρ , ktorá je určená bodom **A** a priamkou **b**.



Obr. 103

- Daný je obraz trojuholníka $\mathbf{ABC} \subset \rho$. Zostrojte trojuholník zhodný s trojuholníkom $\mathbf{ABC}$.



Obr. 104

ZÁVER

Môžeme stretnúť ľudí, ktorí budú tvrdiť, že geometriu v živote nepotrebovali a nikdy ju ani potrebovať nebudú. Je veľmi smutné, že niekto môže tvrdiť: „Žiaden vzduch vôkol nás neexistuje, pretože ho nevidím.“ Keby som chcel žiť bez civilizácie, takisto sa nezaobídem bez geometrie. Zrezať strom je ľahké, ale musím zvažovať kam spadne, aby ma nezabil.

Cieľom mojej práce bolo podať nový pohľad na výučbu jednej partie deskriptívnej geometrie, Mongeovo zobrazenie. Základom bola snaha rozanalyzovať dané problémy na základné konštrukcie, a tým dosiahnuť komplex jednoduchých, ľahko zvládnuteľných úloh. Pretože žiakov (študentov) najskôr odradí pocit nedostatočných vedomostí na zvládnutie daného problému, treba ich akýmsi spôsobom „postrčiť“ k rozanalyzovaniu úlohy, k elementárnym krokom. A práve preto metóda algoritimizácie sa stala

tou, ktorá môže pomôcť zvládnuť aj väčšie sústo geometrických problémov naraz, a zároveň motivovať k prekonávaniu ďalších prekážok.

Svoju prácu by som neskôr rád doplnil o zbierku ďalších príkladov, ktoré by boli zostavené na základe koncepcie mojej práce. Takisto elektronická podoba sa v súčasnej hektickej dobe počítačov dá využiť aj pri mediálnej výučbe.

Nakoniec môžem len dodať: “Ak sa čitateľ po prečítaní textu cíti ako ryba vo vode, znamená to, že moja práca bola podaná stručne a názorne, a o to má autorovi vždy ísť!”

LITERATÚRA

Knihy

- [1] **ČENEK, Gabriel – MEDEK, Václav:** Deskriptivní geometrie I, SVTL, Bratislava 1959
- [2] **DRÁBEK, Karel – HARANT, František – SETZER, Ota:** Deskriptivní geometrie I, SNTL/ALFA, Praha 1978
- [3] **FROLOV, C. A. – POKROVSKAIA, M. V. :** Načertatel'naia geometria, Što eto je?, Minsk 1986
- [4] **FUCKE, Rudolf – KIRCH, Konrad – NICKEL, Heinz:** Darstellende Geometrie, Veb Fachbuchverlag, Leipzig 1963
- [5] **GORDON, V. O. – SEMENCOV-OGNEVSKIJ, M. A. :** Kurs načertatel'noj geometrii, Glaunaja redakcia Fyziko-matematičeskoj literatury, Moskva 1988

- [6] **HARRANT, Michal – LANTA, Oldřich:** Deskriptívna geometria pre 2. a 3. ročník SVŠ, SPN, Bratislava 1965
- [7] **HENRY, Roever William:** The Mongean Method of Descriptive Geometry According to the Procedure of Gino Loria, THE MACMILLAN COMPANY, New York 1933
- [8] **JALŮVKA, Vladimír:** Deskriptivní geometrie pro střední školy pro pracující, SPN, Praha 1961
- [9] **KARGEROVÁ, Marie – MERTL, Petr:** Úlohy na cvičení z geometrie, Vydavatelství ČVUT, Praha 2001
- [10] **KOPNICOVÁ, Edita – KVĚTOŇOVÁ, Božena:** Cvičení z konstruktivní geometrie, Vydavatelství ČVUT, Praha 2002
- [11] **KRAEMER, Emil:** Zobrazovací metody /promítání rovnoběžné/ II. díl, SPN, Praha 1991
- [12] **KUDLIČKOVÁ, Soňa:** Mongeovo zobrazenie, prednášky k predmetu Geometria 4, FMFI UK, Bratislava 2002
- [13] **MEDEK, Václav – SIVOŠOVÁ, Alica:** Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie pre 3. ročník gymnázia, SPN, Bratislava 1974
- [14] **MEDEK, Václav a kol. :** Matematická terminológia, SPN, Bratislava 1977
- [15] **MENŠÍK, Miroslav – SETZER, Ota:** Deskriptivní geometrie I, SNTL, Praha 1981
- [16] **PALAJOVÁ, Helena:** Zbierka úloh z deskriptívnej geometrie, MAT-CENTRUM, Zvolen 1997
- [17] **ŠEVCOVÁ, Monika:** Dejiny Deskriptívnej geometrie – diplomová práca, FMFI UK, Bratislava 1998
- [18] **URBAN, Alois:** Deskriptivní geometrie I, SNTL/ALFA, Praha 1977

Internet

http://www.collegetextbook.net/RB_Monge.shtml

<http://www.nmsi.ac.uk/piclib/imagerecord.asp?id=10284180>

http://www.geometry.net/detail/scientists/monge_gaspard.html

